同期モータの電圧方程式
ー⑤d-q回転座標系⇒3相座標系

大阪府立大学 工学研究科
清水　悠生

本記事を読む前に

- ✓ 本記事はこちらの続きです

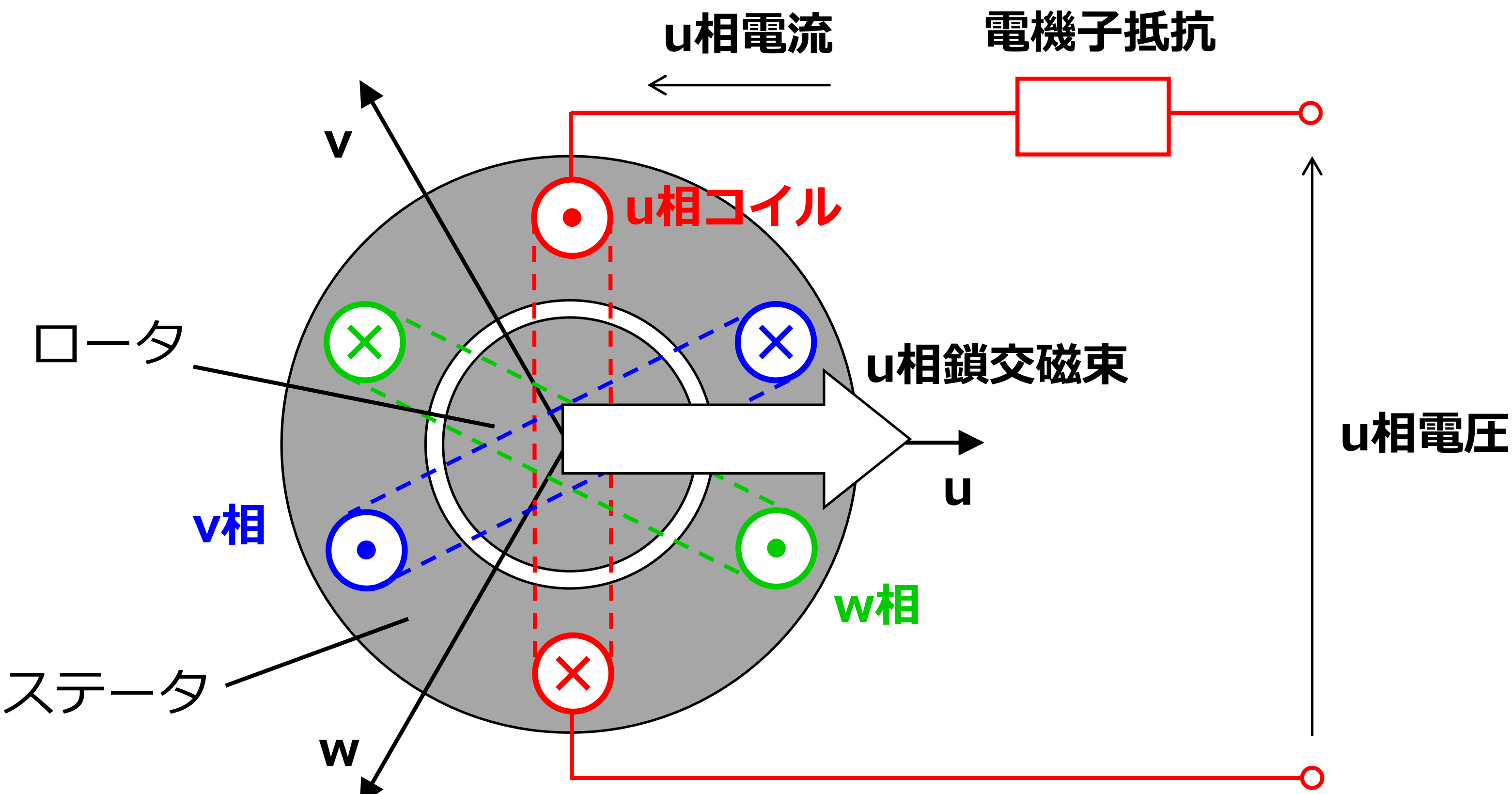
- ✓ 同期モータの電圧方程式①~④
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/10/11/voltageequation/
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/10/18/voltageequation2/
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/10/25/voltageequation3/
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2021/07/05/voltageequation4/

同期モータの電圧方程式

- ✓ 平衡3相交流駆動の同期モータを考える

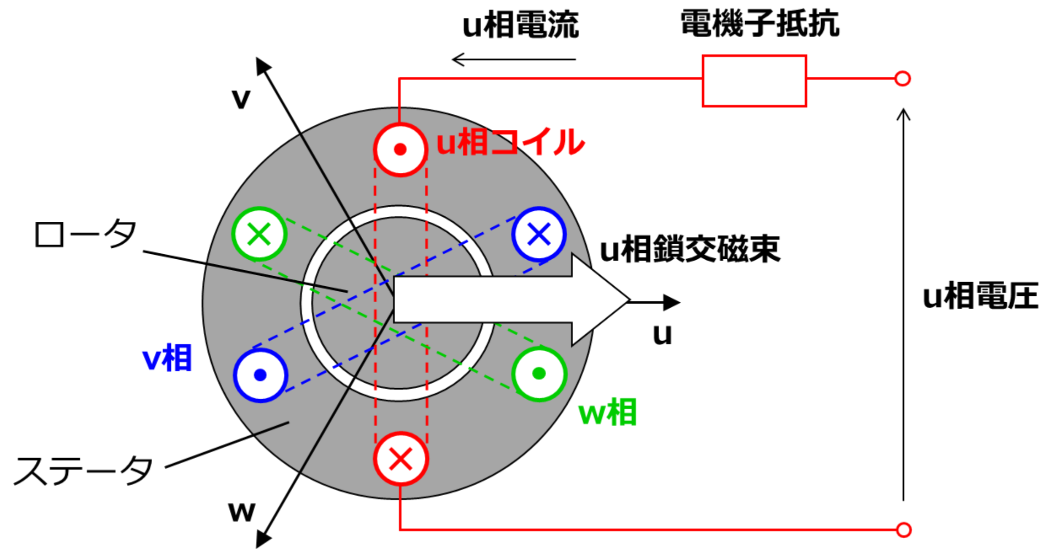
$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}$$

v_u, v_v, v_w ：u,v,w相電圧
i_u, i_v, i_w ：u,v,w相電流
Ψ_u, Ψ_v, Ψ_w ：u,v,w相磁束鎖交数
R_a ：電機子抵抗



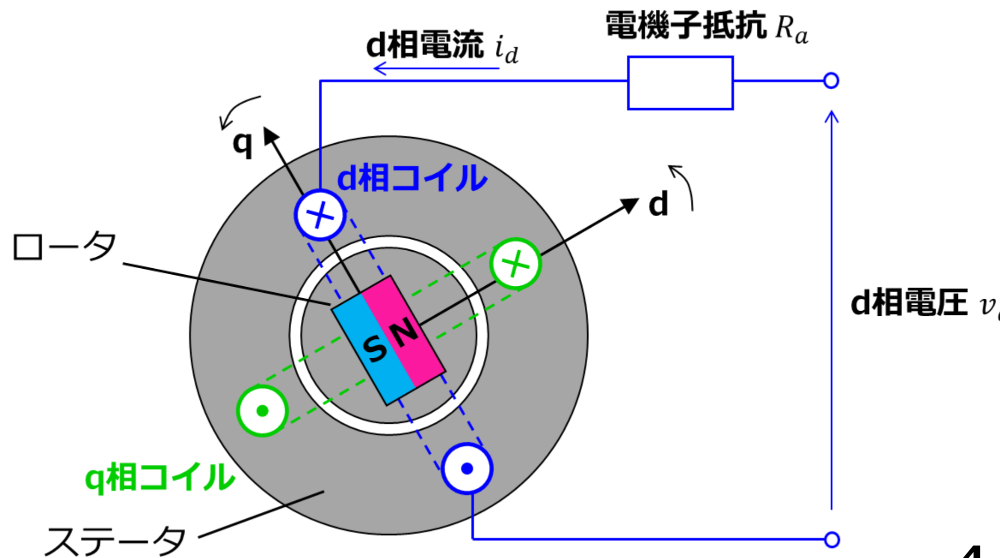
電圧方程式のdq変換

- ✓ 前回までの記事では3相座標系の電圧方程式をd-q回転座標系に変換



$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega L_q i_q \\ \omega L_d i_d + \omega \Psi_a \end{bmatrix}$$

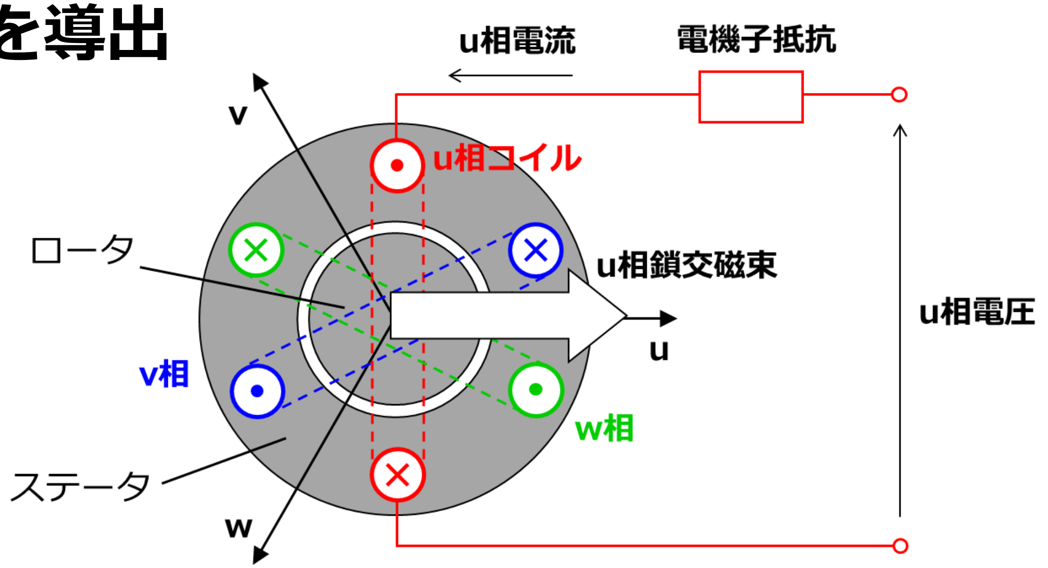


v_d, v_q ：d,q軸電圧
i_d, i_q ：d,q軸電流
L_d, L_q ：d,q軸インダクタンス
Ψ_a ：永久磁石による電機子鎖交磁束
ω ：電気角速度

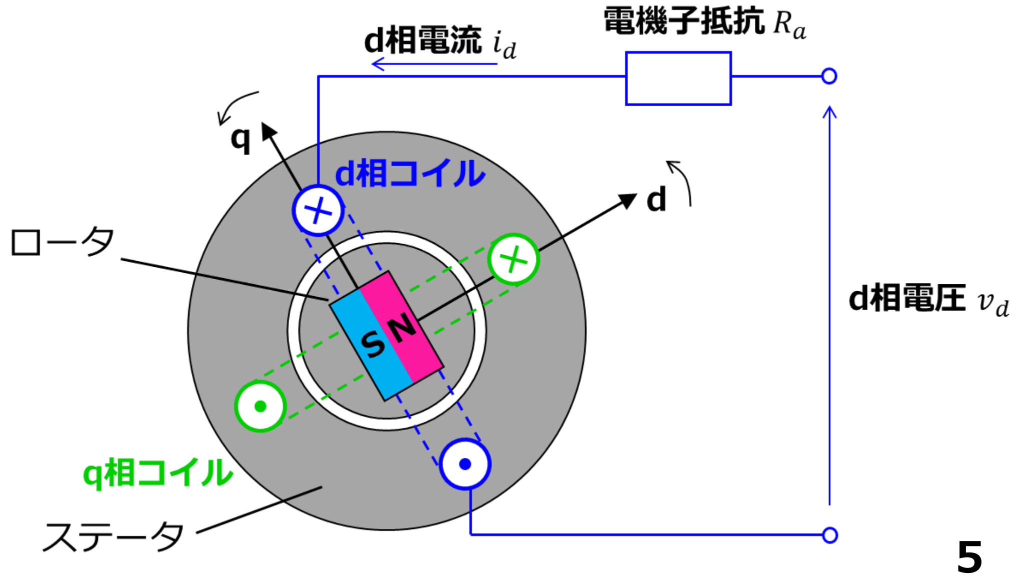
本記事の目標

- ✓ 本記事では**d-q回転座標系の電圧方程式から3相座標系の電圧方程式を導出**

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega L_q i_q \\ \omega L_d i_d + \omega \Psi_a \end{bmatrix}$$



v_d, v_q ：d,q軸電圧
i_d, i_q ：d,q軸電流
L_d, L_q ：d,q軸インダクタンス
Ψ_a ：永久磁石による電機子鎖交磁束
ω ：電気角速度

変換行列の逆行列

- ✓ 絶対変換で零相成分が無視できる場合を考える
- ✓ 絶対変換では変換行列が直交行列となるため
  逆行列は転置を考えればよい

3相座標系⇒d-q回転座標系

$$\boldsymbol{C}_{uvwdq} = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) & \cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \\ -\sin(\omega t) & -\sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix}$$

d-q回転座標系⇒3相座標系

$$\boldsymbol{C}_{dquvw} = \boldsymbol{C}_{uvwdq}^{-1} = \boldsymbol{C}_{uvwdq}^{T}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) & -\sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix}$$

- ✓ 変換行列に関してはこちら↓を参照
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/07/12/dqrotatingcoordinate2/

d-q回転座標系⇒3相座標系への変換

✓ 電圧方程式の両辺に変換行列$\boldsymbol{C}_{dquvw}$を左から掛ける

$$\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_a \boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega \boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix} -L_q i_q \\ L_d i_d + \Psi_a \end{bmatrix}$$

積の微分則より

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}\right) - \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega \boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix} -L_q i_q \\ L_d i_d + \Psi_a \end{bmatrix}$$

定義より$\boldsymbol{C}_{dquvw}^T \boldsymbol{C}_{dquvw} = \boldsymbol{I}$

$$= R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}\underline{\boldsymbol{C}_{dquvw}^T \boldsymbol{C}_{dquvw}}\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}\right) - \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}_{dquvw}\right)\begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega \boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix} -L_q i_q \\ L_d i_d + \Psi_a \end{bmatrix}$$

$$= R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}\boldsymbol{C}_{dquvw}^T \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix}\right) - \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}_{dquvw}\right)\begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega \boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix} -L_q i_q \\ L_d i_d + \Psi_a \end{bmatrix}$$

右辺の第2項目の計算(1/3)

✓ まず右辺の第2項目を計算

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix}L_d & 0\\ 0 & L_q\end{bmatrix}\boldsymbol{C}_{dquvw}^T\begin{bmatrix}i_u\\ i_v\\ i_w\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}\cos(\omega t) & -\sin(\omega t)\\ \cos(\omega t-\frac{2}{3}\pi) & -\sin(\omega t-\frac{2}{3}\pi)\\ \cos(\omega t+\frac{2}{3}\pi) & -\sin(\omega t+\frac{2}{3}\pi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_d & 0\\ 0 & L_q\end{bmatrix}\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}\cos(\omega t) & \cos(\omega t-\frac{2}{3}\pi) & \cos(\omega t+\frac{2}{3}\pi)\\ -\sin(\omega t) & -\sin(\omega t-\frac{2}{3}\pi) & -\sin(\omega t+\frac{2}{3}\pi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_u\\ i_v\\ i_w\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix}L_d\cos(\omega t) & -L_q\sin(\omega t)\\ L_d\cos(\omega t-\frac{2}{3}\pi) & -L_q\sin(\omega t-\frac{2}{3}\pi)\\ L_d\cos(\omega t+\frac{2}{3}\pi) & -L_q\sin(\omega t+\frac{2}{3}\pi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\omega t) & \cos(\omega t-\frac{2}{3}\pi) & \cos(\omega t+\frac{2}{3}\pi)\\ -\sin(\omega t) & -\sin(\omega t-\frac{2}{3}\pi) & -\sin(\omega t+\frac{2}{3}\pi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_u\\ i_v\\ i_w\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}L_d\cos^2(\omega t)+L_q\sin^2(\omega t) & - & -\\ L_d\cos(\omega t)\cos\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)+L_q\sin(\omega t)\sin(\omega t-\frac{2}{3}\pi) & L_d\cos^2(\omega t-\frac{2}{3}\pi)+L_q\sin^2(\omega t-\frac{2}{3}\pi) & -\\ L_d\cos(\omega t)\cos\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right)+L_q\sin(\omega t)\sin(\omega t+\frac{2}{3}\pi) & L_d\cos\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)+L_q\sin\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right)\sin(\omega t-\frac{2}{3}\pi) & L_d\cos^2(\omega t+\frac{2}{3}\pi)+L_q\sin^2(\omega t+\frac{2}{3}\pi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_u\\ i_v\\ i_w\end{bmatrix}$$

上三角行列は下三角行列と同じ式となるため省略

右辺の第2項目の計算(2/3)

- ✓ つづき

$$L_d = l_a + \frac{3}{2}L_a - \frac{3}{2}L_{as}, L_q = l_a + \frac{3}{2}L_a + \frac{3}{2}L_{as}$$

l_a：漏れインダクタンス
L_a：有効インダクタンスの平均値
L_{as}：有効インダクタンスの高調波振幅

とおくと

$$\frac{2}{3}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} L_d\cos^2(\omega t) + L_q\sin^2(\omega t) & - & - \\ L_d\cos(\omega t)\cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + L_q\sin(\omega t)\sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) & L_d\cos^2(\omega t - \frac{2}{3}\pi) + L_q\sin^2(\omega t - \frac{2}{3}\pi) & - \\ L_d\cos(\omega t)\cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) + L_q\sin(\omega t)\sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi) & L_d\cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)\cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + L_q\sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)\sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) & L_d\cos^2(\omega t + \frac{2}{3}\pi) + L_q\sin^2(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} l_a + \frac{3}{2}L_a - \frac{3}{2}L_{as}\cos(2\omega t) & - & - \\ -\frac{1}{2}l_a - \frac{3}{4}L_a - \frac{3}{2}L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & l_a + \frac{3}{2}L_a - \frac{3}{2}L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) & - \\ -\frac{1}{2}l_a - \frac{3}{4}L_a - \frac{3}{2}L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2}l_a - \frac{3}{4}L_a - \frac{3}{2}L_{as}\cos(2\omega t) & l_a + \frac{3}{2}L_a - \frac{3}{2}L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \frac{2}{3}l_a + L_a - L_{as}\cos(2\omega t) & - & - \\ -\frac{1}{3}l_a - \frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{2}{3}l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & - \\ -\frac{1}{3}l_a - \frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{3}l_a - \frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos(2\omega t) & \frac{2}{3}l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix}$$

上三角行列は下三角行列と同じ式となるため省略

右辺の第2項目の計算(3/3)

✓ つづき

$i_u + i_v + i_w = 0$より

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}l_a & -\frac{1}{3}l_a & -\frac{1}{3}l_a \\ -\frac{1}{3}l_a & \frac{2}{3}l_a & -\frac{1}{3}l_a \\ -\frac{1}{3}l_a & -\frac{1}{3}l_a & \frac{2}{3}l_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}l_a i_u - \frac{1}{3}l_a i_v - \frac{1}{3}l_a i_w \\ -\frac{1}{3}l_a i_u + \frac{2}{3}l_a i_v - \frac{1}{3}l_a i_w \\ -\frac{1}{3}l_a i_u - \frac{1}{3}l_a i_v + \frac{2}{3}l_a i_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_a i_u \\ l_a i_v \\ l_a i_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_a & 0 & 0 \\ 0 & l_a & 0 \\ 0 & 0 & l_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix}$$

より

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \frac{2}{3}l_a + L_a - L_{as}\cos(2\omega t) & - & - \\ -\frac{1}{3}l_a - \frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & \frac{2}{3}l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & - \\ -\frac{1}{3}l_a - \frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{3}l_a - \frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos(2\omega t) & \frac{2}{3}l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} l_a + L_a - L_{as}\cos(2\omega t) & -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos(2\omega t) \\ -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos(2\omega t) & l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix}$$

3相座標系でのインダクタンス行列が導出できた！

右辺の第3,4項目の計算

✓ 右辺の第3,4項目を計算

$$-\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}_{dquvw}\right)\begin{bmatrix}L_d & 0\\ 0 & L_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_d\\ i_q\end{bmatrix}+\omega\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix}-L_q i_q\\ L_d i_d+\Psi_a\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}\cos(\omega t) & -\sin(\omega t)\\ \cos\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right) & -\sin\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)\\ \cos\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right) & -\sin\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right)\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}L_d & 0\\ 0 & L_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_d\\ i_q\end{bmatrix}+\omega\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix}-L_q i_q\\ L_d i_d+\Psi_a\end{bmatrix}$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}-\omega\sin(\omega t) & -\omega\cos(\omega t)\\ -\omega\sin\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right) & -\omega\cos\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)\\ -\omega\sin\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right) & -\omega\cos\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_d & 0\\ 0 & L_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_d\\ i_q\end{bmatrix}+\omega\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix}-L_q i_q\\ L_d i_d+\Psi_a\end{bmatrix}$$

$$=-\omega\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_d & 0\\ 0 & L_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_d\\ i_q\end{bmatrix}+\omega\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_d & 0\\ 0 & L_q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_d\\ i_q\end{bmatrix}+\omega\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix}0\\ \Psi_a\end{bmatrix}$$

$$=\omega\boldsymbol{C}_{dquvw}\begin{bmatrix}0\\ \Psi_a\end{bmatrix}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\Psi_a\begin{bmatrix}-\omega\sin(\omega t)\\ -\omega\sin\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)\\ -\omega\sin\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right)\end{bmatrix}=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Psi_f\cos(\omega t)\\ \Psi_f\cos\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)\\ \Psi_f\cos\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right)\end{bmatrix}$$

$$\Psi_a=\sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_f$$

Ψ_f ：3相座標系での界磁磁束振幅

導出した3相座標系の電圧方程式

- ✓ 以上までの計算をまとめると，電圧方程式は次式のとおり
- ✓ dq軸上の電圧方程式の導出に使用した
  3相座標系の電圧方程式を復元することができた！

電圧方程式

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} L_u & M_{vu} & M_{wu} \\ M_{uv} & L_v & M_{wv} \\ M_{uw} & M_{vw} & L_w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Psi_f \cos(\omega t) \\ \Psi_f \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ \Psi_f \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \end{bmatrix}$$

自己インダクタンス

$$L_u = l_a + L_a - L_{as}\cos(2\omega t)$$

$$L_v = l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$L_w = l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

相互インダクタンス

$$M_{uv} = M_{vu} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$M_{vw} = M_{wv} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos(2\omega t)$$

$$M_{wu} = M_{uw} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

3相座標系の相互インダクタンスに関する考察

- ✓ 3相座標系の相互インダクタンスの導出は
  第1回記事で非常に曖昧に記載（よくわかっていなかった）
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/10/11/voltageequation/

- ✓ 本記事の導出結果から，3相座標系の相互インダクタンスは
  ① 自己インダクタンスがモータ周期の半分
  ② dq座標上での相互インダクタンスが0
- ✓ この二つの仮定のもと導出されたのではないか，と推測

$$M_{uv} = M_{vu} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$M_{vw} = M_{wv} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos(2\omega t)$$
$$M_{wu} = M_{uw} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$