同期モータの電圧方程式
ー④d,q軸鎖交磁束を用いた導出

大阪府立大学 工学研究科
清水　悠生

本記事を読む前に

- ✓ 本記事はこちらの続きです

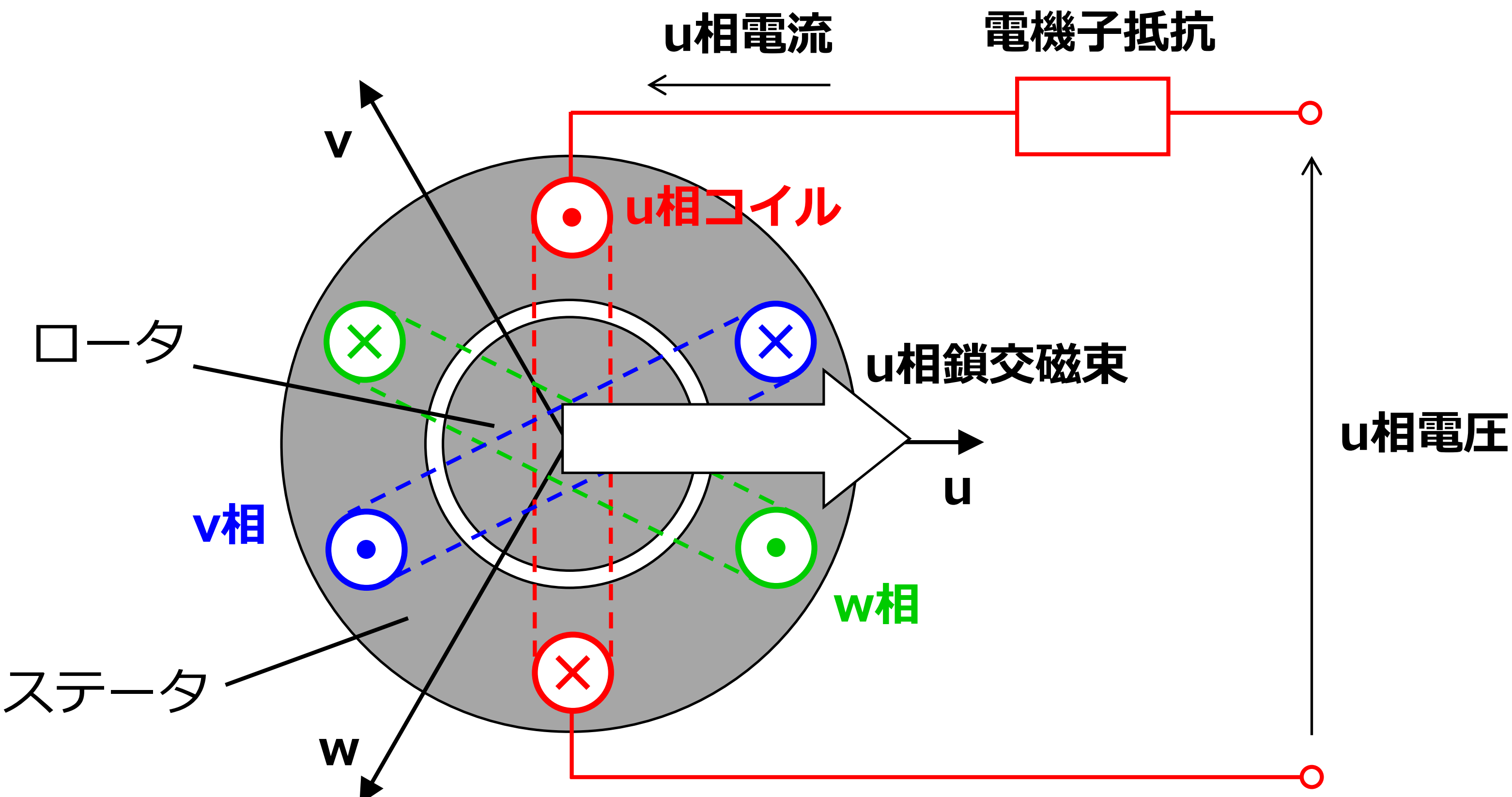
- ✓ 同期モータの電圧方程式③
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/10/25/voltageequation3/

同期モータの電圧方程式

✓ 平衡3相交流駆動の同期モータを考える

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}$$

v_u, v_v, v_w ：u,v,w相電圧
i_u, i_v, i_w ：u,v,w相電流
Ψ_u, Ψ_v, Ψ_w ：u,v,w相電機子鎖交磁束
R_a ：電機子抵抗



本記事の目標

- ✓ 電圧方程式の3相座標系⇒d-q座標系の変換を鎖交磁束ベースで行う

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}$$

v_u, v_v, v_w ：u,v,w相電圧
i_u, i_v, i_w ：u,v,w相電流
Ψ_u, Ψ_v, Ψ_w ：u,v,w相電機子鎖交磁束
R_a ：電機子抵抗

- ✓ 前回使用したインダクタンス行列と界磁磁束ベクトルは本記事（の前半）では使用しない

電圧方程式の計算

- ✓ 電圧方程式の両辺に変換行列 **C** を左から掛ける
- ✓ この時点で変換行列は3相⇒α-β/d-qのどちらでも良い

$$\boldsymbol{C}\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}R_a\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \underline{\boldsymbol{C}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}}$$

$$= \boldsymbol{C}R_a\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \underline{\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}\right) - \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{C}\right)\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}}$$

行列の積の微分公式より

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{AB}) = \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}\right) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{AB}) - \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{B}$$

- ✓ 変換行列に関してはこちら↓を参照
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/07/12/dqrotatingcoordinate2/

3相座標系⇒α-β座標系の場合

- ✓ 3相⇒α-β（絶対変換）の場合は変換行列が時間に依存しないのでそのまま計算する

3相⇒α-βの場合

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \frac{d}{dt}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから

$$\boldsymbol{C}\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}R_a\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}\right) - \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{C}\right)\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = R_a\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Psi_\alpha \\ \Psi_\beta \end{bmatrix}$$

v_α, v_β ：α,β相電圧
i_α, i_β ：α,β相電流
Ψ_α, Ψ_β ：α,β相電機子鎖交磁束

α-β座標系⇒d-q回転座標系の場合(1/2)

✓ α-β⇒d-qの場合は変換行列の時間微分を計算する必要あり

α-β⇒d-qの場合

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C_u} \\ \boldsymbol{C_l} \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{C} = \omega \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \\ -\cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \boldsymbol{C_l} \\ -\boldsymbol{C_u} \end{bmatrix}$$

となる

α-β座標系⇒d-q回転座標系の場合(2/2)

✓ 計算すると，鎖交磁束表現の電圧方程式が求まる

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{C} = \omega\begin{bmatrix} -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \\ -\cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \end{bmatrix} = \omega\begin{bmatrix} \boldsymbol{C_l} \\ -\boldsymbol{C_u} \end{bmatrix}$$

より

$$\boldsymbol{C}\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}R_a\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}\right) - \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{C}\right)\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_a\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} - \omega\begin{bmatrix} \boldsymbol{C_l} \\ -\boldsymbol{C_u} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}$$

$$= R_a\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} + \omega\begin{bmatrix} -\Psi_q \\ \Psi_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C_u}\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{C_l}\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

v_d, v_q ：d,q相電圧
i_d, i_q ：d,q相電流
Ψ_d, Ψ_q ：d,q相電機子鎖交磁束

電圧方程式の解釈

- ✓ 電圧方程式は以下のように解釈可能

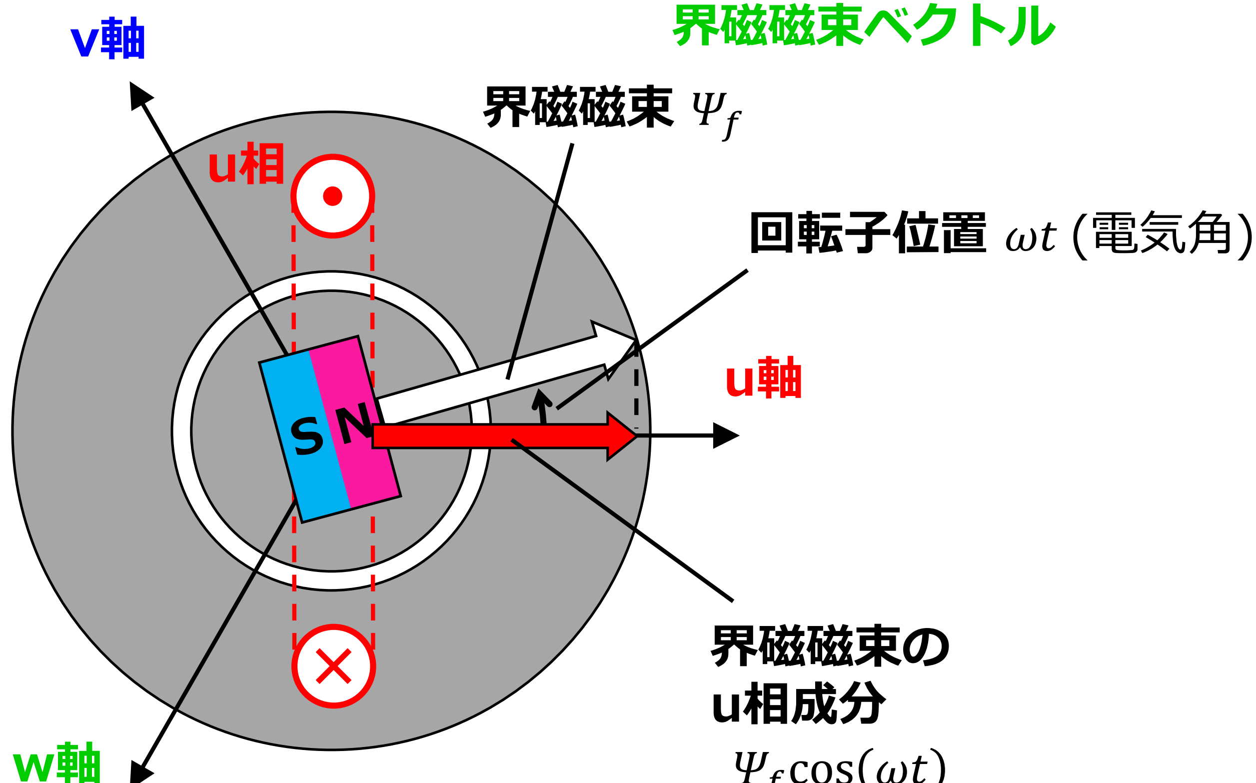
$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \underbrace{R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}}_{\text{電圧降下}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix}}_{\text{非定常状態の誘導起電力}} + \underbrace{\omega \begin{bmatrix} -\Psi_q \\ \Psi_d \end{bmatrix}}_{\text{定常状態の誘導起電力}}$$

- ✓ つづいて，この方程式からインダクタンス表現の電圧方程式を導出してみます

u,v,w相鎖交磁束

- ✓ u,v,w相磁束鎖交数ベクトルは次式の通り

$$\begin{bmatrix}\Psi_u\\\Psi_v\\\Psi_w\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}L_u & M_{vu} & M_{wu}\\M_{uv} & L_v & M_{wv}\\M_{uw} & M_{vw} & L_w\end{bmatrix}}_{\text{インダクタンス行列}}\begin{bmatrix}i_u\\i_v\\i_w\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}\Psi_f\cos(\omega t)\\\Psi_f\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\\\Psi_f\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)\end{bmatrix}}_{\text{界磁磁束ベクトル}}$$



3相座標系におけるインダクタンス

- ✓ 3相座標系における自己インダクタンス，相互インダクタンスは次式のように定義

- ✓ **自己インダクタンス**

$$L_u = l_a + L_a - L_{as}\cos(2\omega t)$$

$$L_v = l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$L_w = l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

- ✓ **相互インダクタンス**

$$M_{uv} = M_{vu} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$M_{vw} = M_{wv} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos(2\omega t)$$

$$M_{wu} = M_{uw} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

- ✓ 詳細はこちら↓を参照
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/10/11/voltageequation/

鎖交磁束の3相座標系⇒α-β座標系の変換(1/4)

✓ 両辺に変換行列 $\boldsymbol{C}_2$ を左から掛ける

$$C_2=\sqrt{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

定義より $\boldsymbol{C}_2^T\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{C}_2\begin{bmatrix}\Psi_u\\ \Psi_v\\ \Psi_w\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_2\begin{bmatrix}L_u & M_{vu} & M_{wu}\\ M_{uv} & L_v & M_{wv}\\ M_{uw} & M_{vw} & L_w\end{bmatrix}\boldsymbol{C}_2^T\boldsymbol{C}_2\begin{bmatrix}i_u\\ i_v\\ i_w\end{bmatrix}+\boldsymbol{C}_2\begin{bmatrix}\Psi_f\cos(\omega t)\\ \Psi_f\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\\ \Psi_f\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\Psi_\alpha\\ \Psi_\beta\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_2\begin{bmatrix}L_u & M_{vu} & M_{wu}\\ M_{uv} & L_v & M_{wv}\\ M_{uw} & M_{vw} & L_w\end{bmatrix}\boldsymbol{C}_2^T\begin{bmatrix}i_\alpha\\ i_\beta\end{bmatrix}+\boldsymbol{C}_2\begin{bmatrix}\Psi_f\cos(\omega t)\\ \Psi_f\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\\ \Psi_f\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)\end{bmatrix}$$

鎖交磁束の3相座標系⇒α-β座標系の変換(2/4)

- ✓ インダクタンス行列を計算する

$$
\boldsymbol{C}_2\begin{bmatrix} L_u & M_{vu} & M_{wu} \\ M_{uv} & L_v & M_{wv} \\ M_{uw} & M_{vw} & L_w \end{bmatrix}\boldsymbol{C}_2^T
$$

$$
=\begin{bmatrix} \frac{2}{3}L_u+\frac{1}{6}L_v+\frac{1}{6}L_w-\frac{2}{3}M_{uv}-\frac{2}{3}M_{uw}+\frac{1}{3}M_{vw} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}L_v+\frac{1}{2\sqrt{3}}L_w+\frac{1}{\sqrt{3}}M_{vu}-\frac{1}{\sqrt{3}}M_{wu} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}L_v+\frac{1}{2\sqrt{3}}L_w+\frac{1}{\sqrt{3}}M_{vu}-\frac{1}{\sqrt{3}}M_{wu} & \frac{1}{2}L_v+\frac{1}{2}L_w-M_{wv} \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} l_a+\frac{3}{2}L_a-\frac{3}{2}L_{as}\cos(2\omega t) & -\frac{3L_{as}}{2}\sin(2\omega t) \\ -\frac{3L_{as}}{2}\sin(2\omega t) & l_a+\frac{3}{2}L_a+\frac{3}{2}L_{as}\cos(2\omega t) \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} L_0+L_1\cos(2\omega t) & L_1\sin(2\omega t) \\ L_1\sin(2\omega t) & L_0-L_1\cos(2\omega t) \end{bmatrix}
$$

- ✓ この式変形は↓のp.8-10,12の結果を利用
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/10/18/voltageequation2/

鎖交磁束の3相座標系⇒α-β座標系の変換(3/4)

✓ 界磁磁束ベクトルを計算する

$$\boldsymbol{C}_2 \begin{bmatrix} \Psi_f \cos(\omega t) \\ \Psi_f \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \Psi_f \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_f \cos(\omega t) \\ \Psi_f \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \Psi_f \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \Psi_f \begin{bmatrix} \cos(\omega t) - \frac{1}{2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\sqrt{\frac{3}{2}} \Psi_f} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\Psi_a} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$\cos(\omega t) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

+和積の公式

鎖交磁束の3相座標系⇒α-β座標系の変換(4/4)

✓ まとめると，α-β座標系の鎖交磁束は次式

$$\begin{bmatrix} \Psi_\alpha \\ \Psi_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 + L_1 \cos(2\omega t) & L_1 \sin(2\omega t) \\ L_1 \sin(2\omega t) & L_0 - L_1 \cos(2\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \Psi_a \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

鎖交磁束のα-β座標系⇒d-q回転座標系の変換

✓ 両辺に変換行列 $\boldsymbol{C}_3$ を左から掛ける

$$\boldsymbol{C}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} \Psi_\alpha \\ \Psi_\beta \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} L_0 + L_1\cos(2\omega t) & L_1\sin(2\omega t) \\ L_1\sin(2\omega t) & L_0 - L_1\cos(2\omega t) \end{bmatrix} \boldsymbol{C}_3^T \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \Psi_a \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} = \underline{\boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} L_0 + L_1\cos(2\omega t) & L_1\sin(2\omega t) \\ L_1\sin(2\omega t) & L_0 - L_1\cos(2\omega t) \end{bmatrix} \boldsymbol{C}_3^T \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}} + \underline{\Psi_a \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix}}$$

$$= \underline{L_0 \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{C}_3^T \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + L_1 \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) \end{bmatrix} \boldsymbol{C}_3^T \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}} + \underline{\Psi_a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\left(\begin{aligned} &\boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{C}_3^T = \boldsymbol{C}_3 \boldsymbol{C}_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{絶対変換の定義} \\ &\boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) \end{bmatrix} \boldsymbol{C}_3^T = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & -\cos(\omega t) \end{bmatrix} \boldsymbol{C}_3^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right)$$

加法定理

$$= \underline{\begin{bmatrix} L_0 + L_1 & 0 \\ 0 & L_0 - L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}} + \underline{\begin{bmatrix} \Psi_a \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$L_d := L_0 + L_1$$

$$L_q := L_0 - L_1$$

$$= \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

✓ 鎖交磁束をd-q回転座標系に変換できた！

もとの電圧方程式に代入する

- ✓ 導出した鎖交磁束式をもとの電圧方程式に代入する

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -\Psi_q \\ \Psi_d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} L_d i_d + \Psi_a \\ L_q i_q \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -L_q i_q \\ L_d i_d + \Psi_a \end{bmatrix}$$

$$= R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega L_q i_q \\ \omega L_d i_d + \omega \Psi_a \end{bmatrix}$$

- ✓ こちらの記事↓で導出した電圧方程式と同じ結果に！
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/10/25/voltageequation3/
- ✓ 鎖交磁束を介した方が計算量が少ない