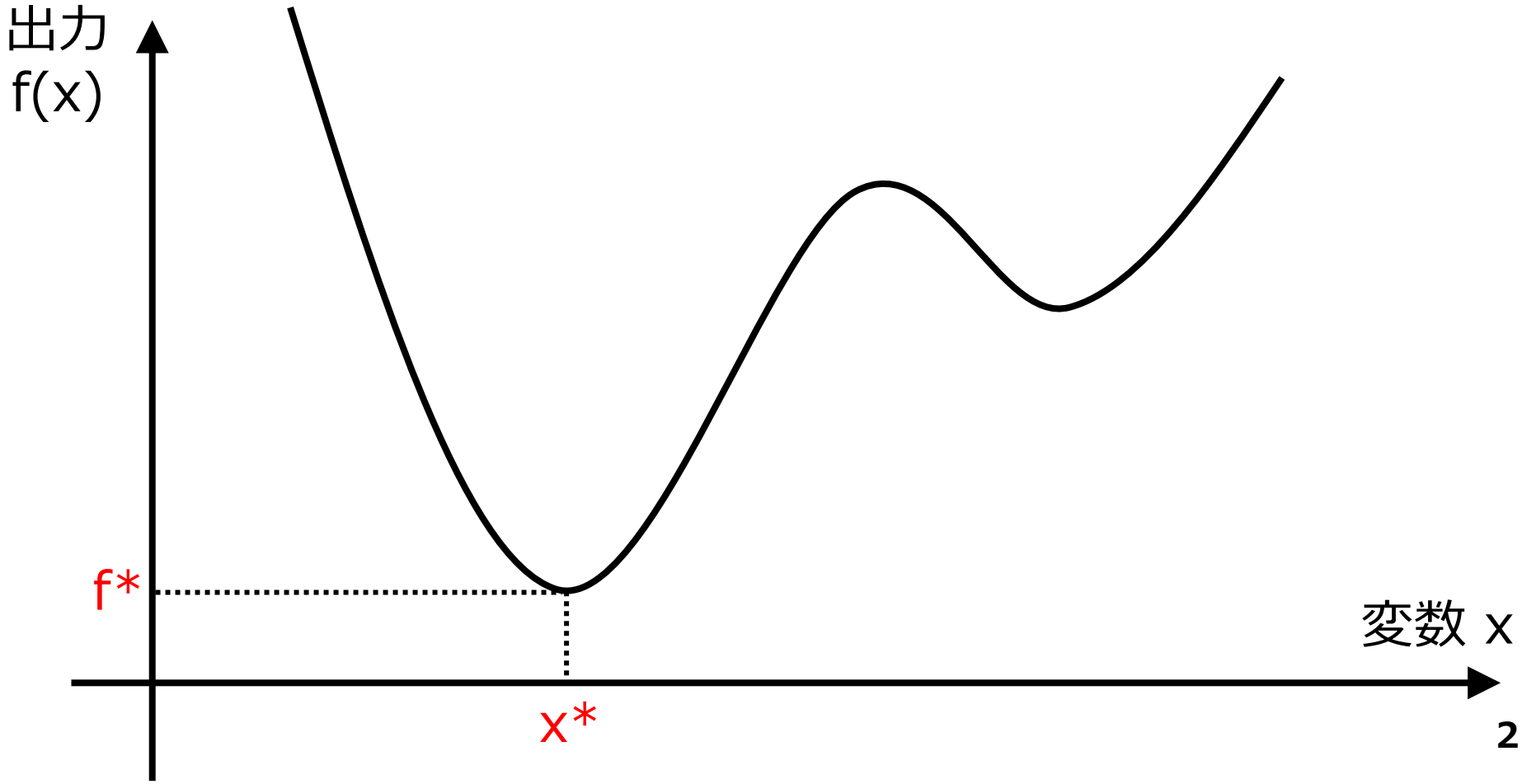
最適化手法評価のための
ベンチマーク関数

Benchmark Function

大阪府立大学 工学研究科
清水　悠生

最適化とは？

- ✓ ある基準に従って最も適切な解を求めることを**最適化**という
- ✓ 数学的に，目的関数 f を最小化（最大化）する解 x* を求める問題を**最適化問題**と呼ぶ



最適化が難しい関数の性質

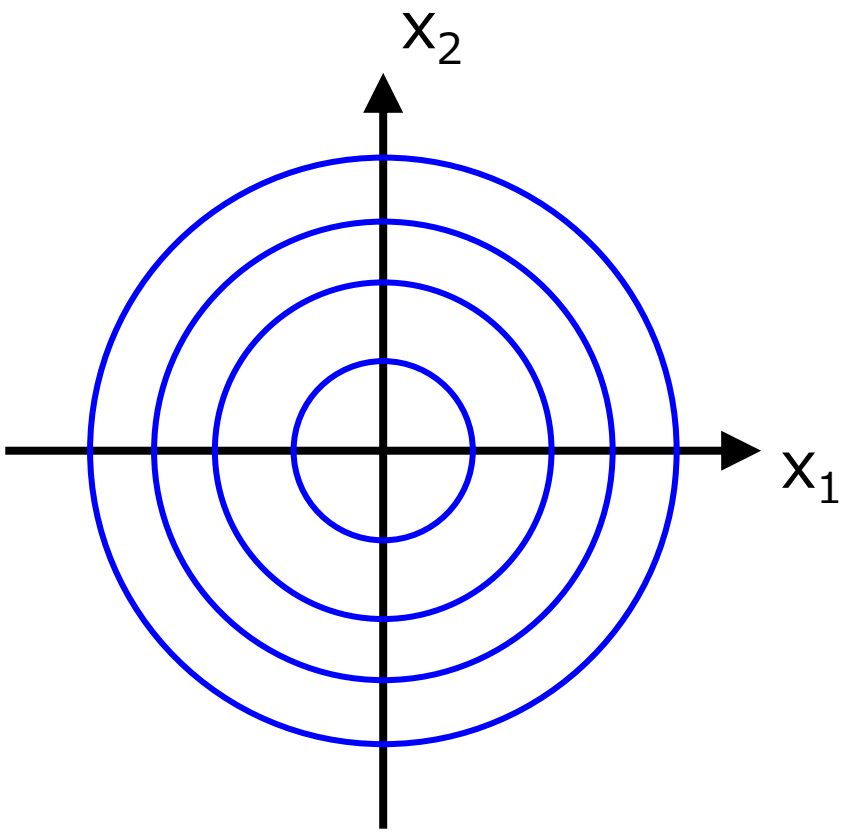
✓ 微分可能な関数の最適化において
最適化が困難な関数の特徴は下記のようなものが存在

- **悪スケール性**
- **変数間依存性**
- **多峰性**

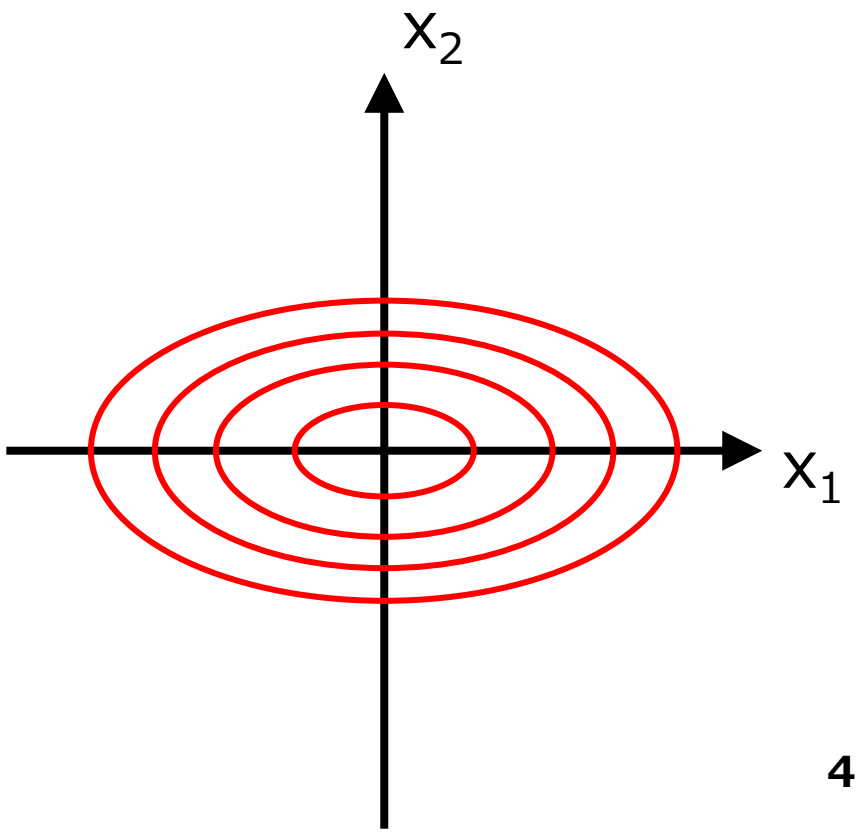
悪スケール性

- ✓ 同じ出力をとる範囲が変数によって大きく異なる性質を**悪スケール性**と呼ぶ
- ✓ 感度の低い変数の方向に最適化が進みづらくなる

良スケール性関数の等高線（2変数）



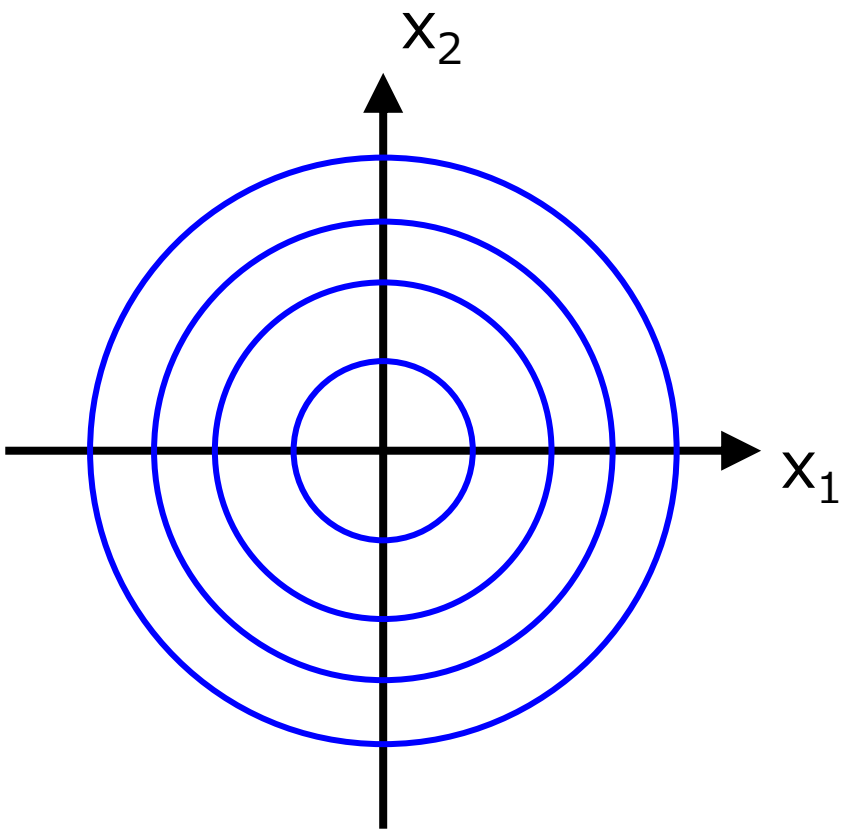
悪スケール性関数の等高線（2変数）



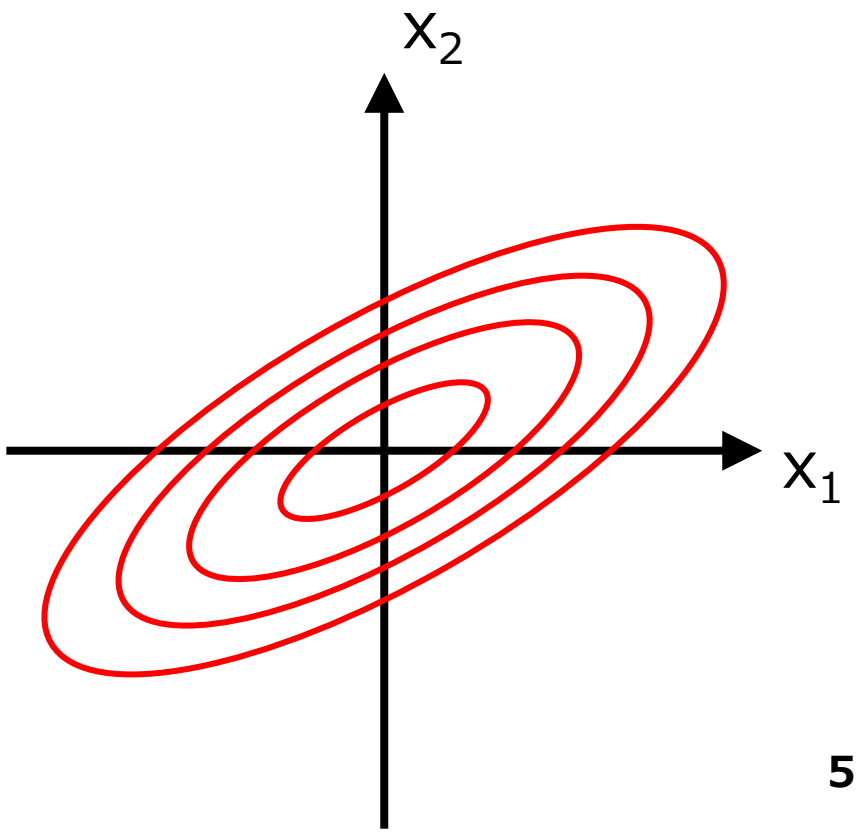
変数間依存性

- ✓ 目的関数を各変数毎の関数の和として表現できない性質を**変数間依存性**と呼ぶ
- ✓ 悪スケール性と同様に最適化が進みづらい方向が存在

変数間依存性のない関数の等高線（2変数）

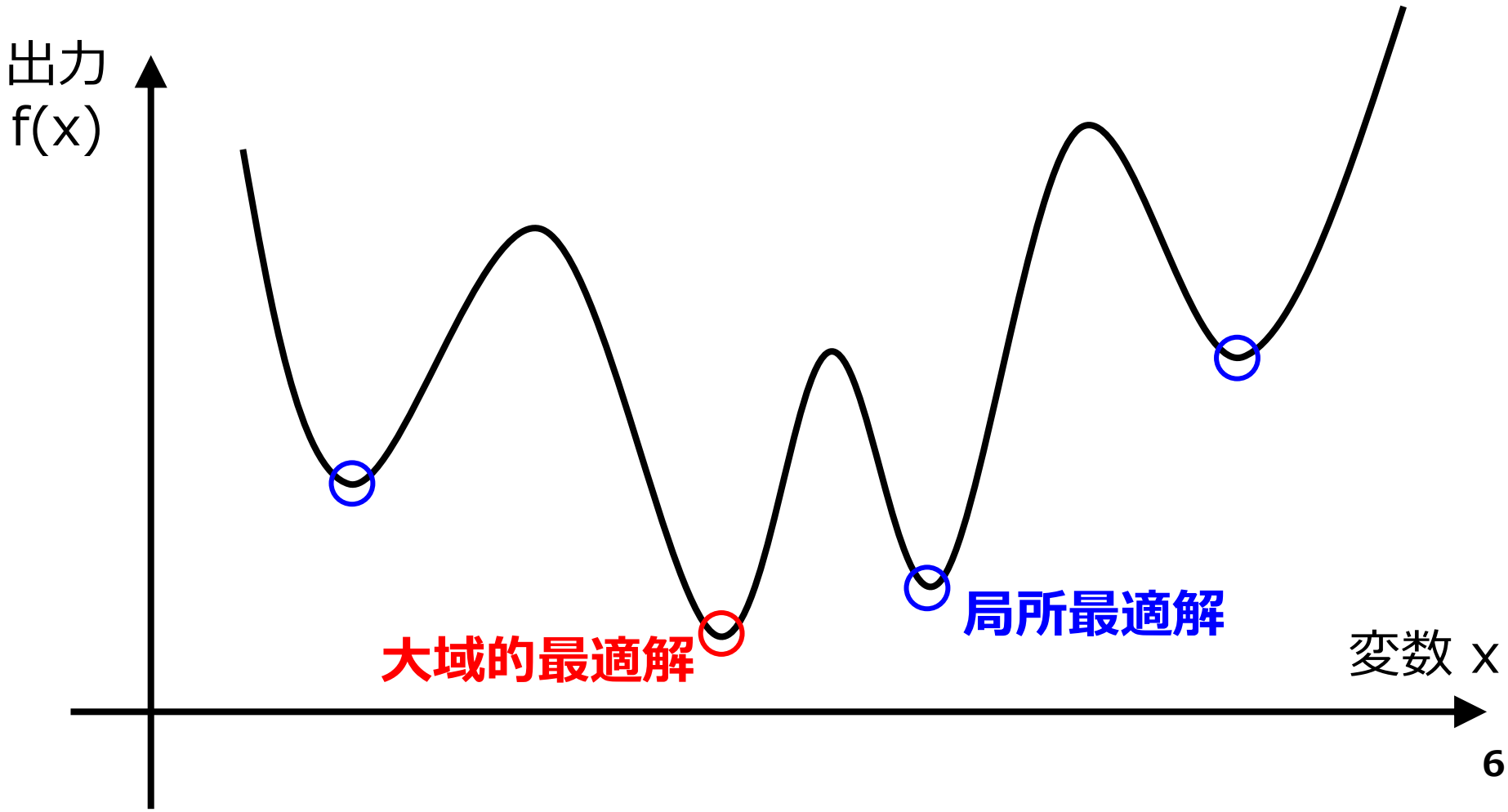


変数間依存性のある関数の等高線（2変数）



多峰性

- ✓ 極値が複数存在する関数を**多峰性関数**と呼ぶ
- ✓ 真の最適解（**大域的最適解**）ではなく
  局所最適解に収束してしまうリスクが存在



ベンチマーク関数

- ✓ 最適化手法の性能を評価するための評価関数を**ベンチマーク関数**と呼ぶ

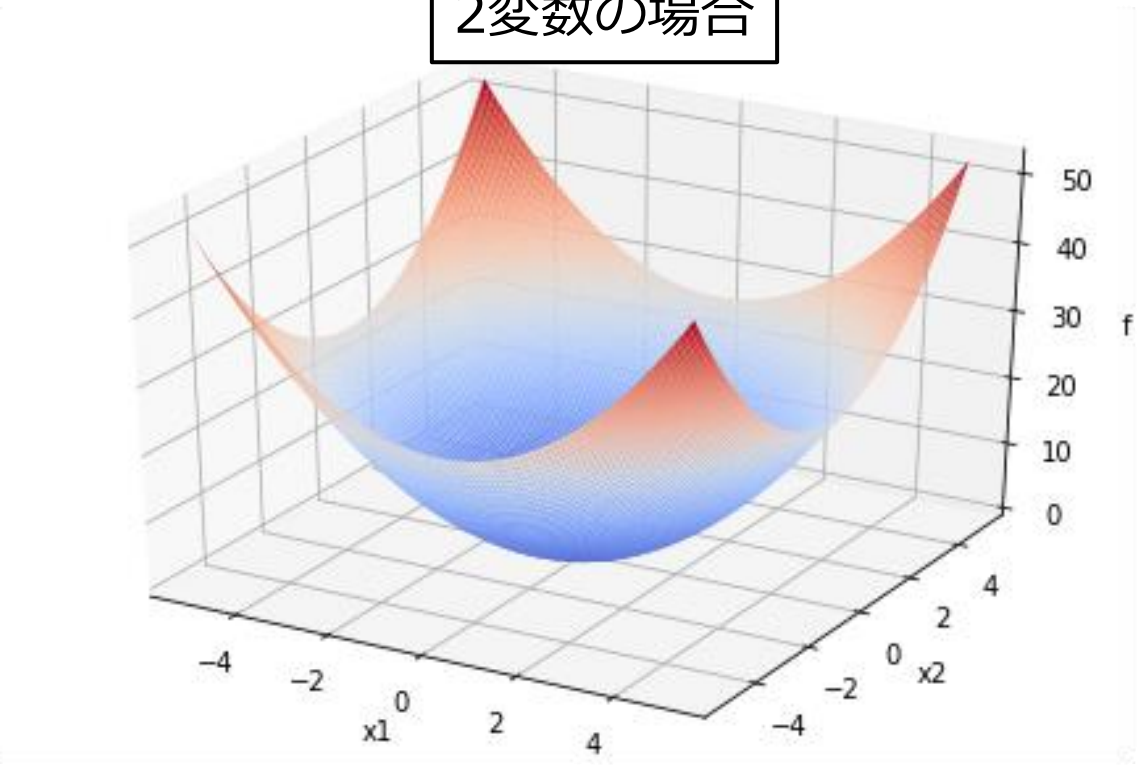
- ✓ 本記事では，前スライドまでで説明した性質を持つ9種類のベンチマーク関数を紹介

- ✓ Pythonによる実装例はこちら↓
- ✓ https://github.com/yshimizu12/BenchmarkFunction

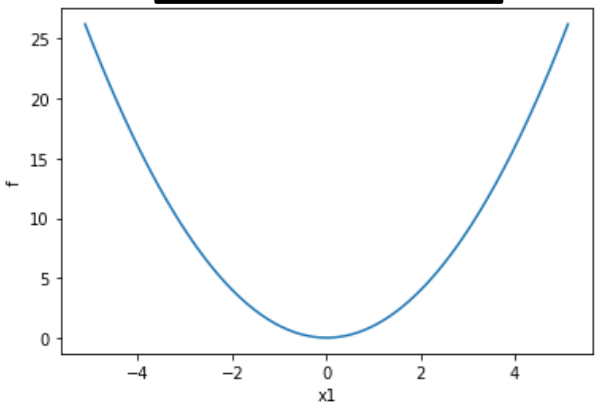
Sphere関数

✓ 性能評価の基本となる単純な凸関数

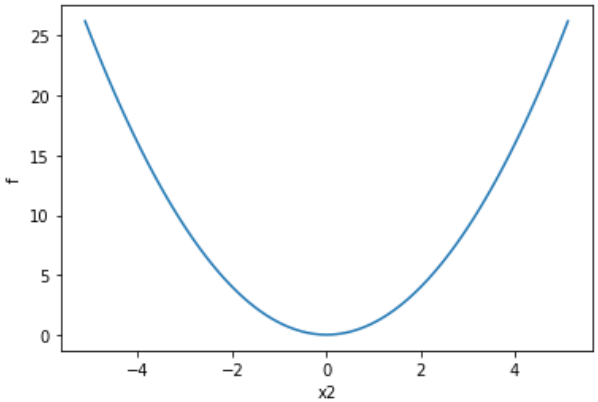
2変数の場合



x_2=0平面上



x_1=0平面上



$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

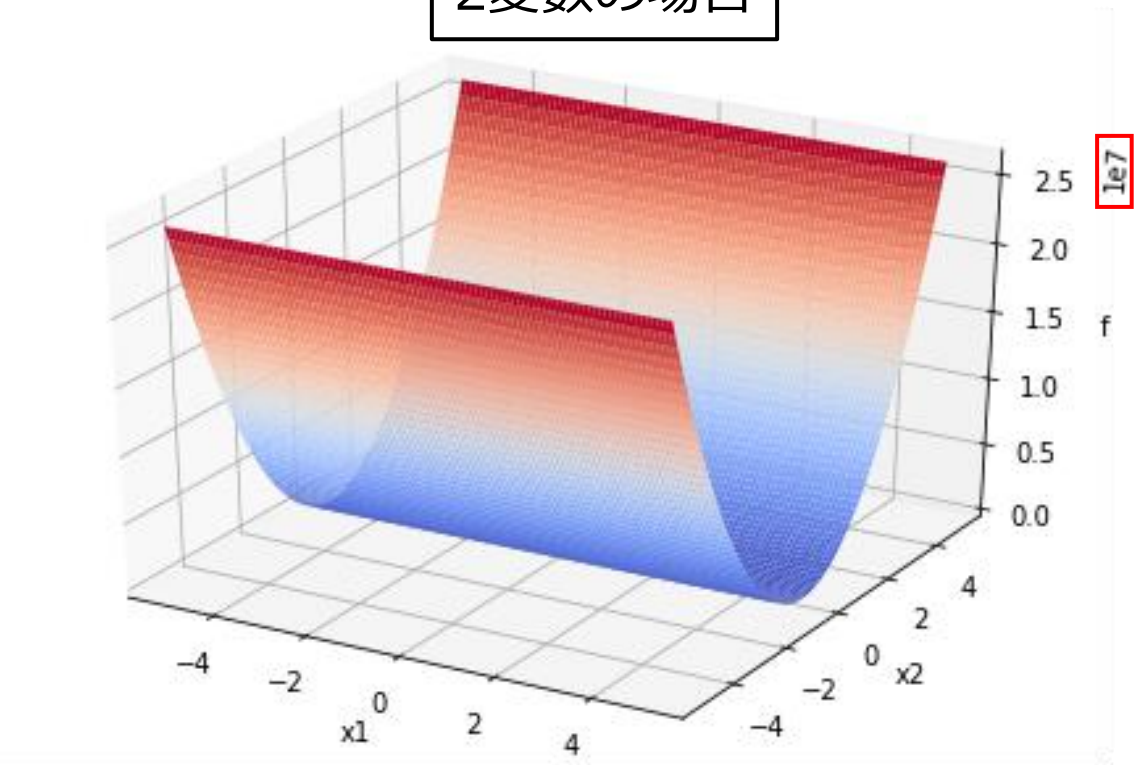
探索範囲：$\boldsymbol{S} = [-5.12, 5.12]^n$

最適解： $\boldsymbol{x}^* = (0, \ldots, 0)$

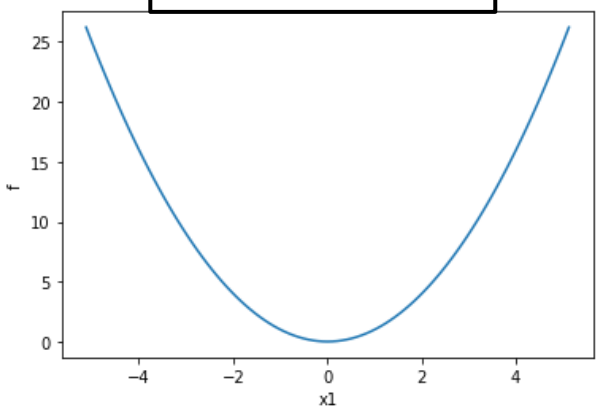
Ellipsoid関数

✓ 弱い悪スケール性を示す関数

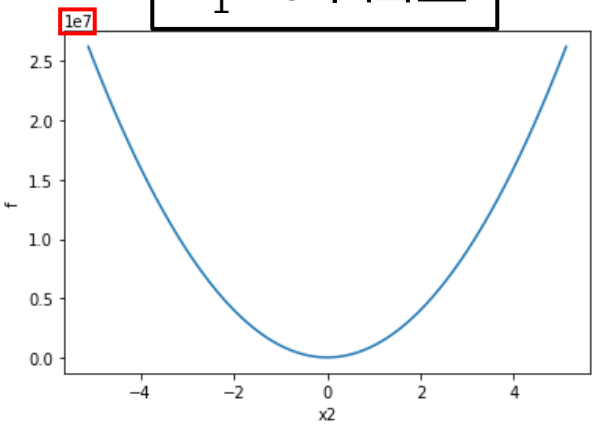
2変数の場合



x_2=0平面上



x_1=0平面上



$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(1000^{i-1/n-1} x_i\right)^2$$

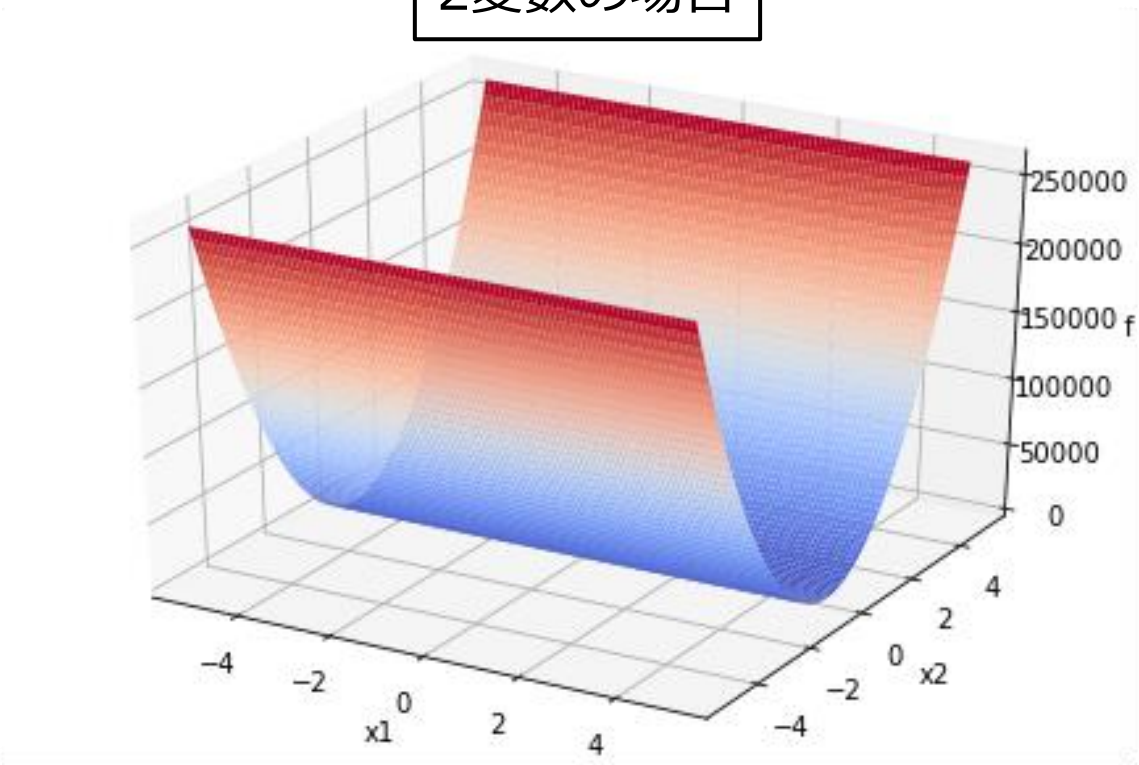
探索範囲：$\boldsymbol{S} = [-5.12, 5.12]^n$

最適解： $\boldsymbol{x}^* = (0, \ldots, 0)$

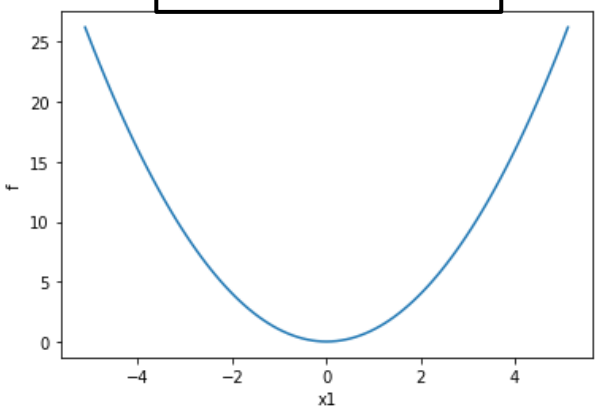
k-tablet関数 (k=n/4)

✓ 強い悪スケール性を示す関数

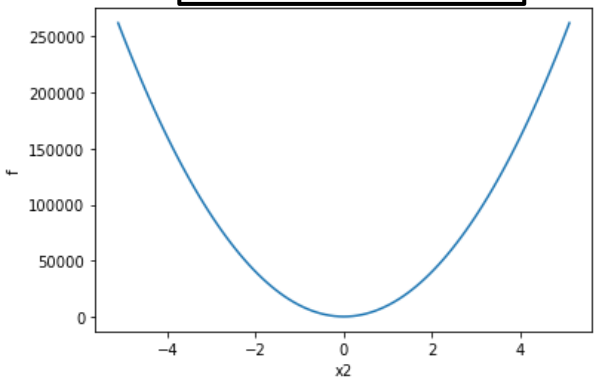
2変数の場合



x_2=0平面上



x_1=0平面上



$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} (100x_i)^2$$

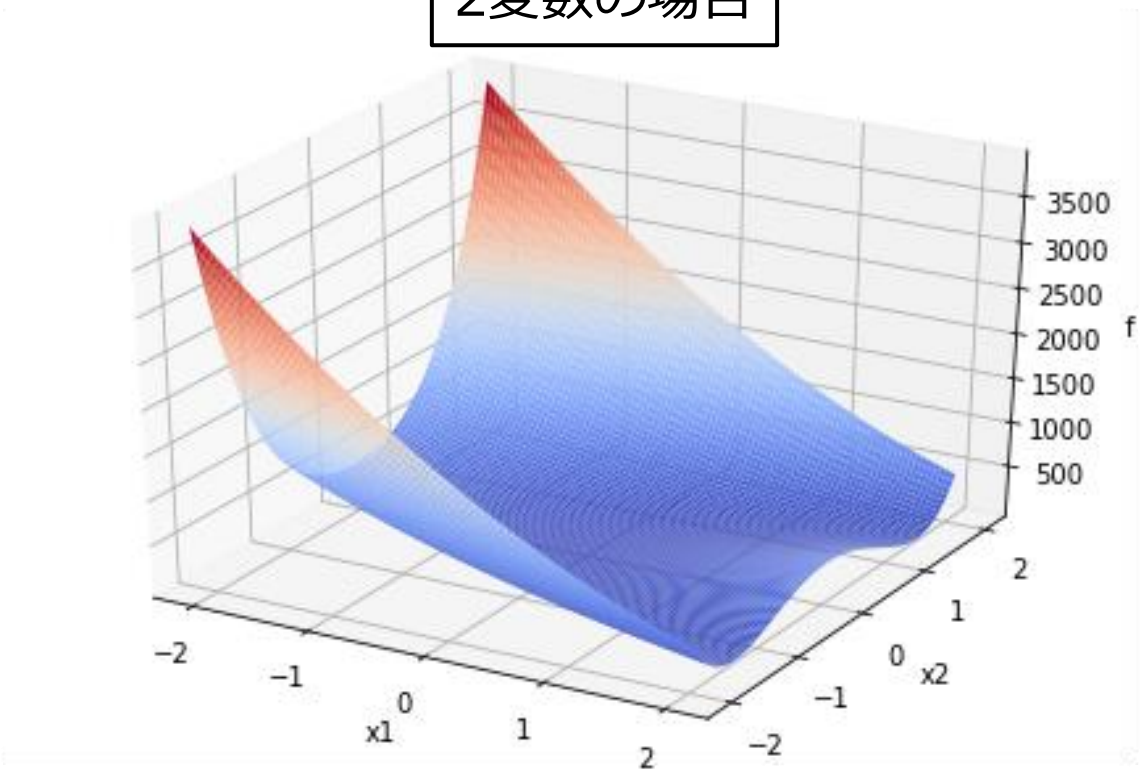
探索範囲：$\boldsymbol{S} = [-5.12, 5.12]^n$

最適解： $\boldsymbol{x}^* = (0, \ldots, 0)$

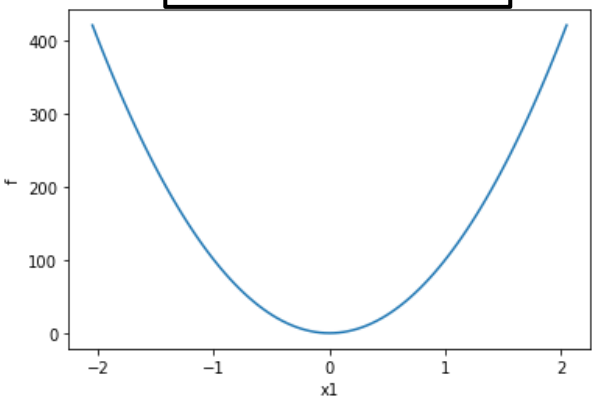
Rosenbrock関数 (star型)

✓ 変数x_1と他変数の間に強い変数間依存性を有する関数

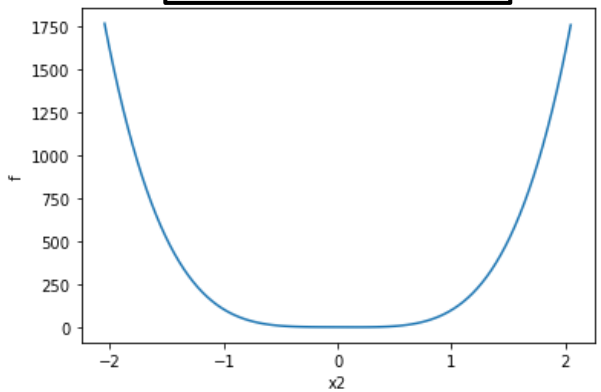
2変数の場合



x_2=0平面上



x_1=0平面上



$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=2}^{n} \left(100\left(x_1 - x_i^2\right)^2 + (1 - x_i)^2\right)$$

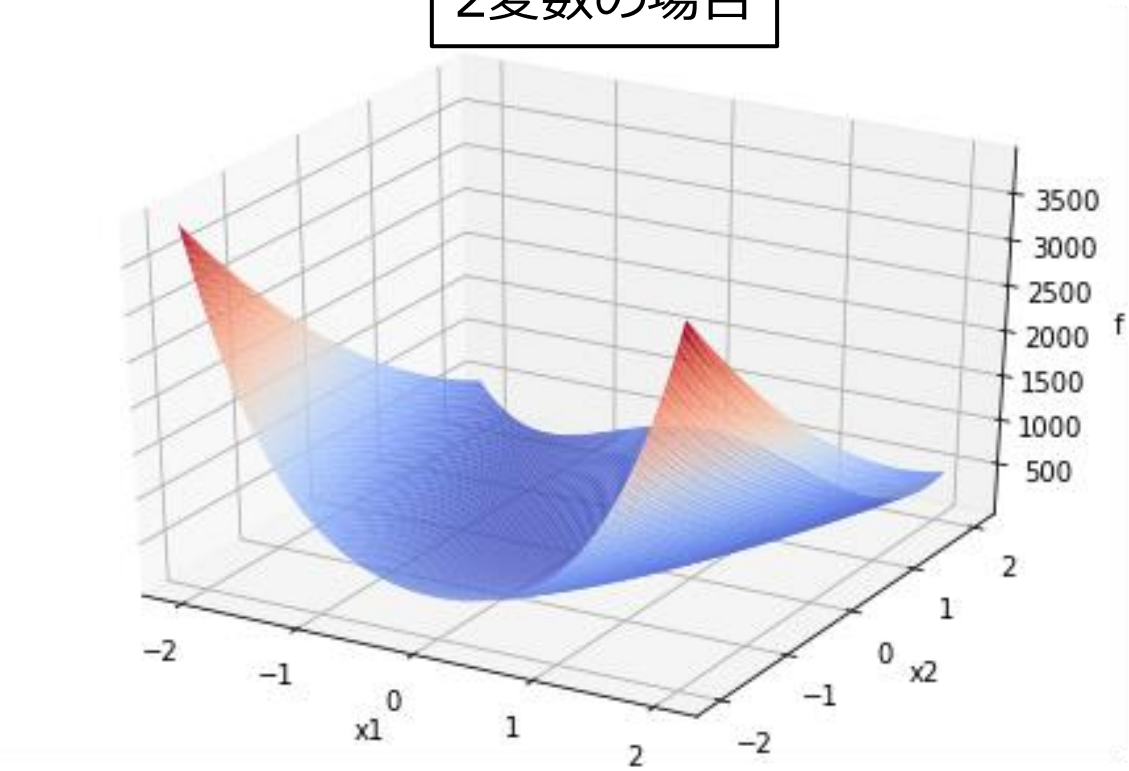
探索範囲：$\boldsymbol{S} = [-2.048, 2.048]^n$

最適解： $\boldsymbol{x}^* = (1, \ldots, 1)$

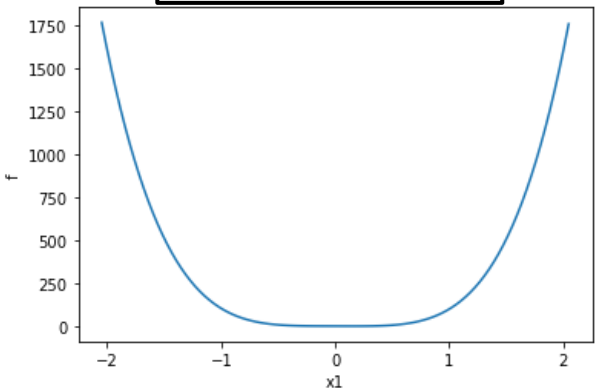
Rosenbrock関数 (chain型)

✓ 隣り合う変数間に強い変数間依存性を有する関数

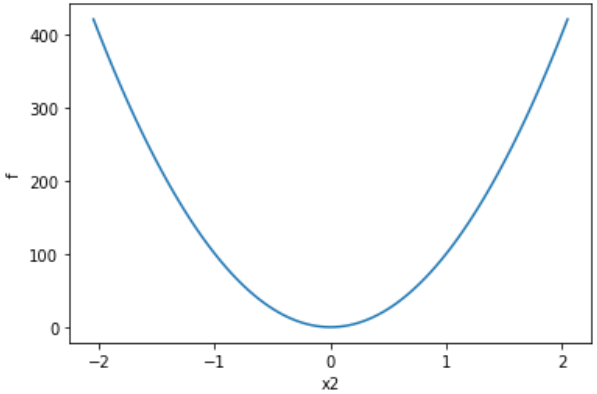
2変数の場合



x_2=0平面上



x_1=0平面上



$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(100\left(x_{i+1} - x_i^2\right)^2 + (1 - x_i)^2\right)$$

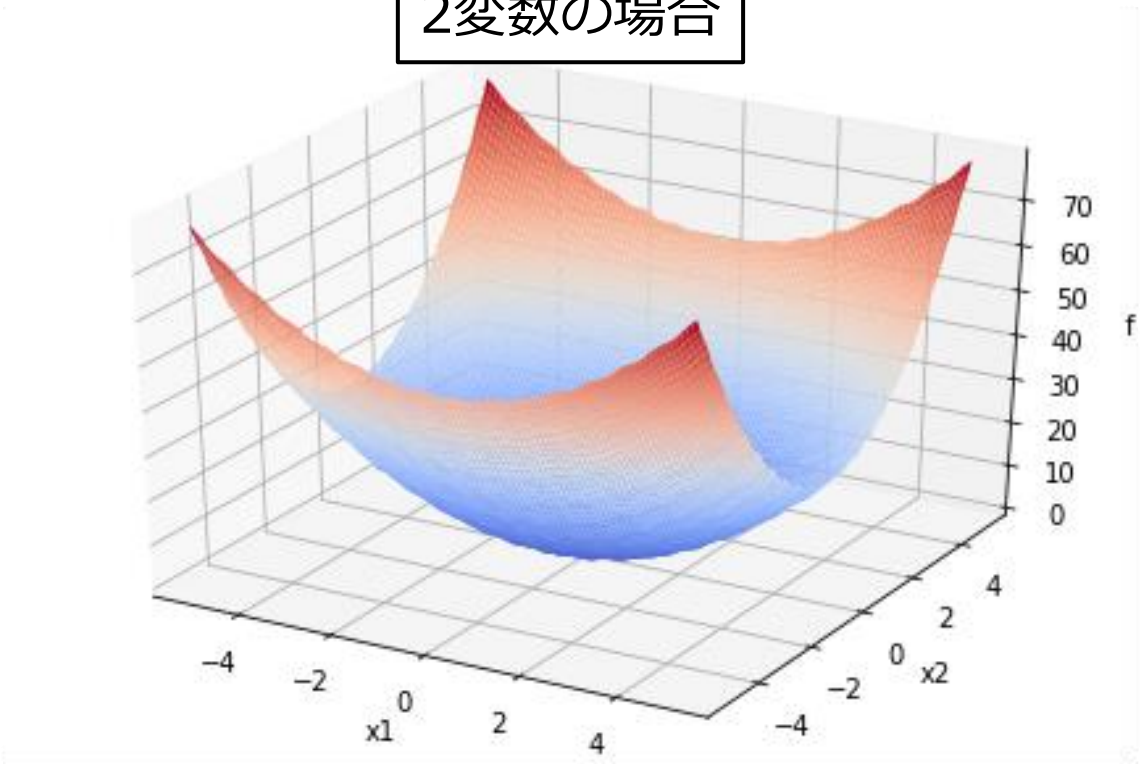
探索範囲：$\boldsymbol{S} = [-2.048, 2.048]^n$

最適解： $\boldsymbol{x}^* = (1, \dots, 1)$

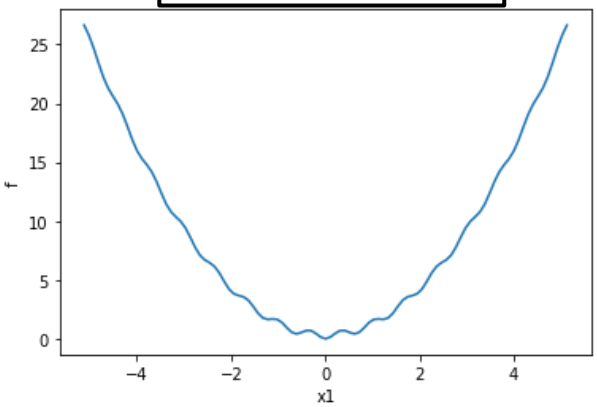
Bohachevsky関数

✓ 比較的弱い多峰性を示す関数

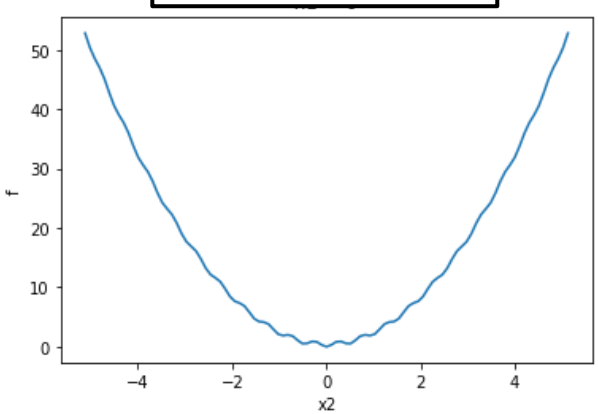
2変数の場合



x_2=0平面上



x_1=0平面上



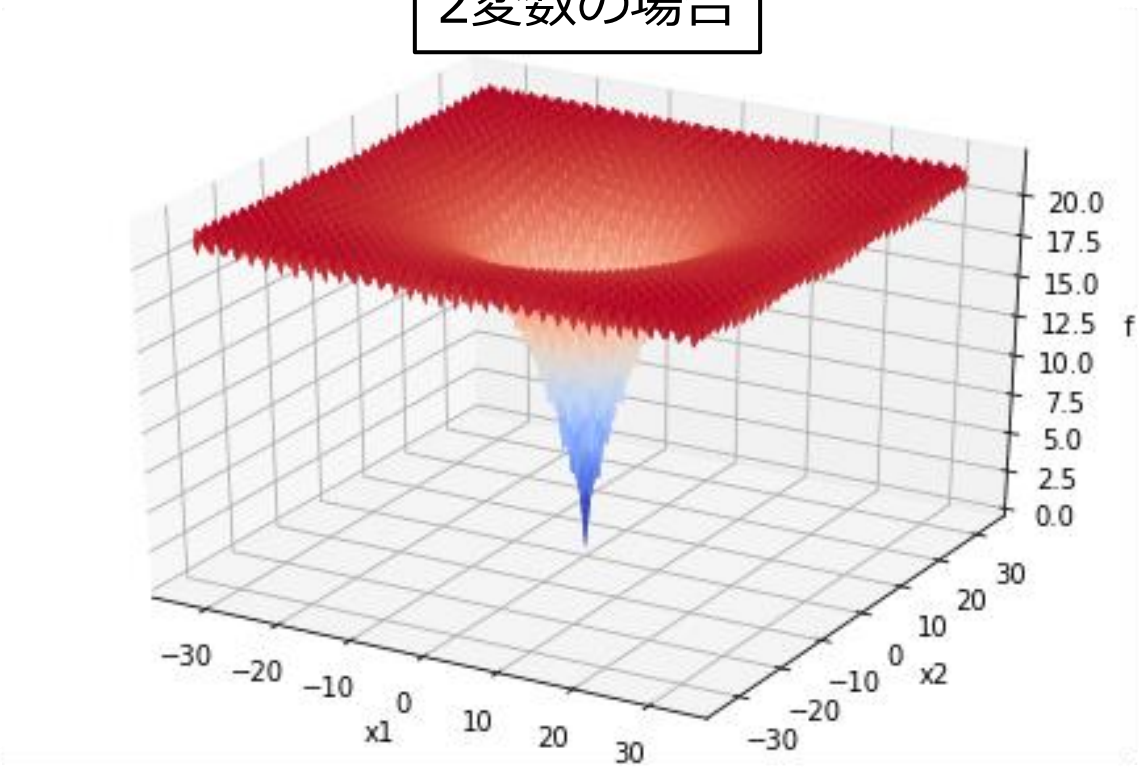
$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i^2 + 2x_{i+1}^2 - 0.3\cos(3\pi x_i) - 0.4\cos(4\pi x_{i+1}) + 0.7\right)$$

探索範囲：$\boldsymbol{S} = [-5.12, 5.12]^n$，最適解：$\boldsymbol{x}^* = (0, \ldots, 0)$

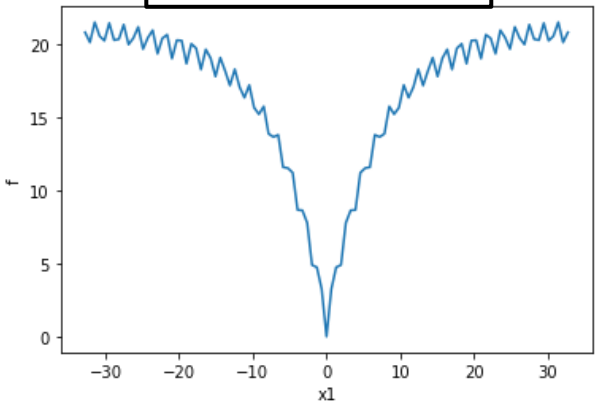
Ackley関数

✓ 比較的弱い多峰性を示す関数

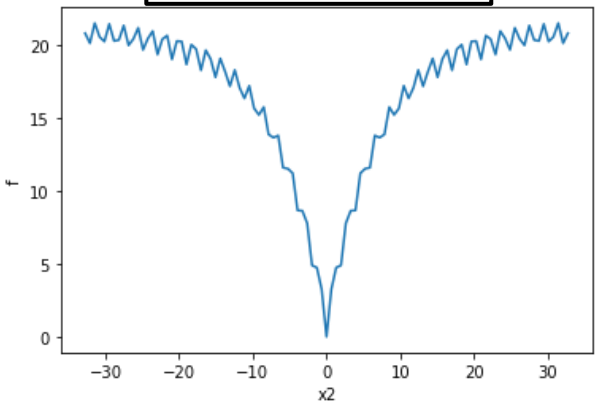
2変数の場合



x_2=0平面上



x_1=0平面上



$$f(\boldsymbol{x})$$

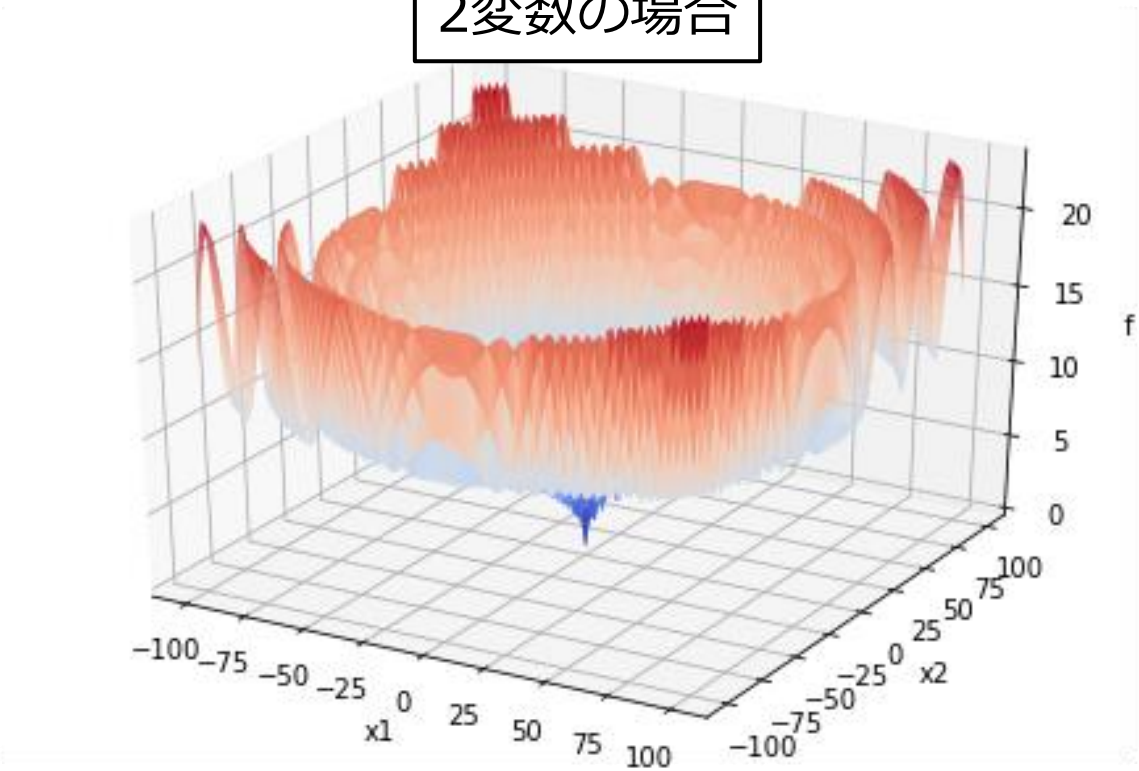
$$= 20 - 20\exp\left(-0.2\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right) + e - \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos(2\pi x_i)\right)$$

探索範囲：$\boldsymbol{S} = [-32.768, 32.768]^n$，最適解：$\boldsymbol{x}^* = (0, \ldots, 0)$

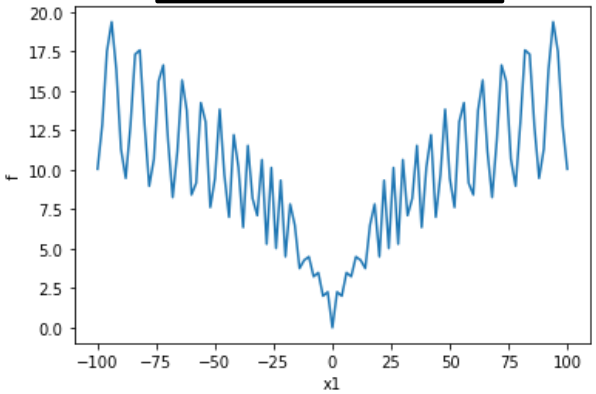
Schaffer関数

✓ 強い多峰性を示す関数

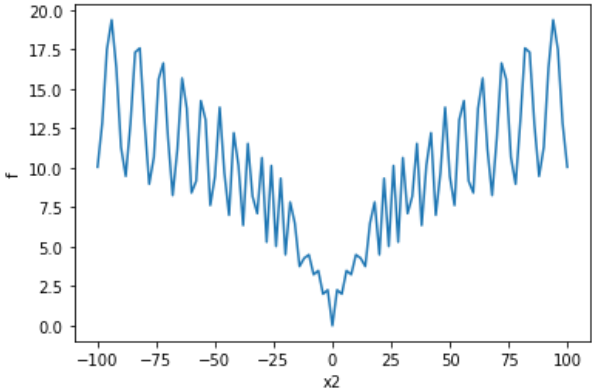
2変数の場合



x_2=0平面上



x_1=0平面上



$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_i^2 + x_{i+1}^2\right)^{0.25} \left(\sin^2\left(50\left(x_i^2 + x_{i+1}^2\right)^{0.1}\right) + 1.0\right)$$

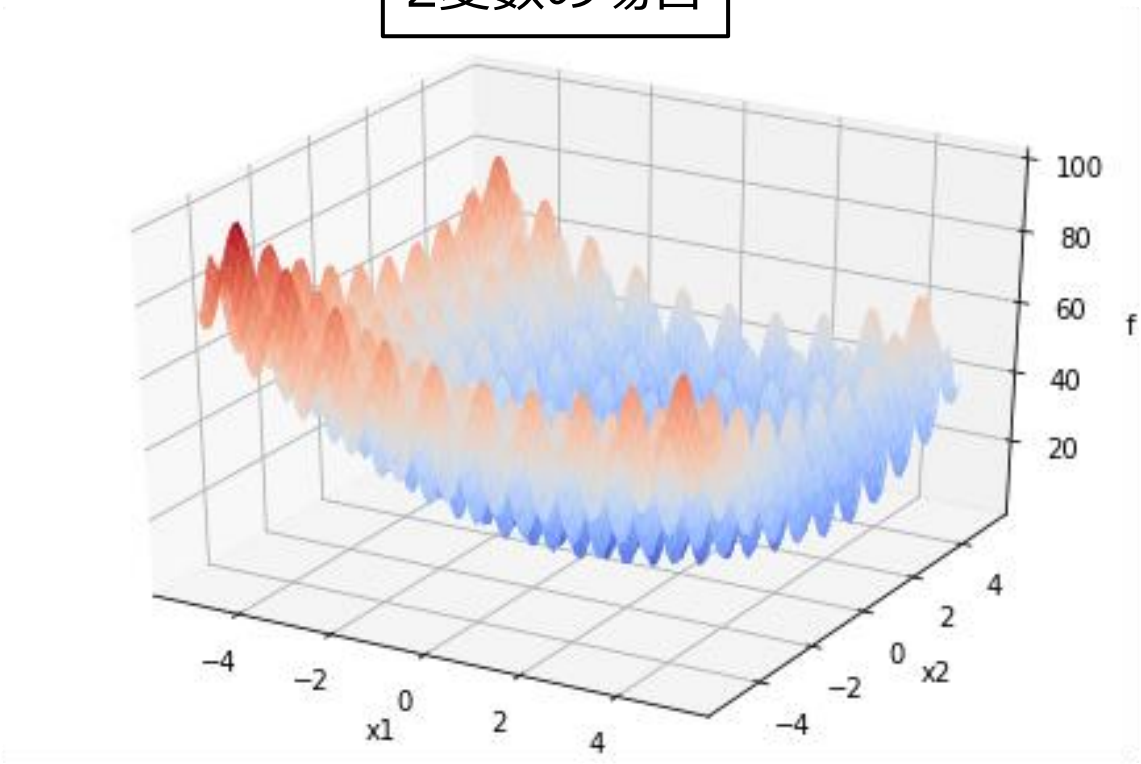
探索範囲：$\boldsymbol{S} = [-100,100]^n$

最適解： $\boldsymbol{x}^* = (0, \dots, 0)$

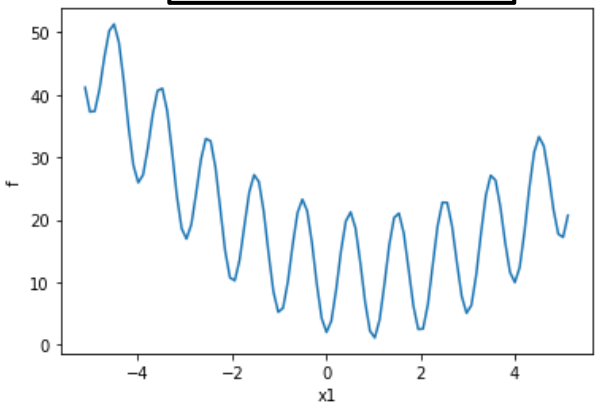
Rastrigin関数

✓ 強い多峰性を示す関数

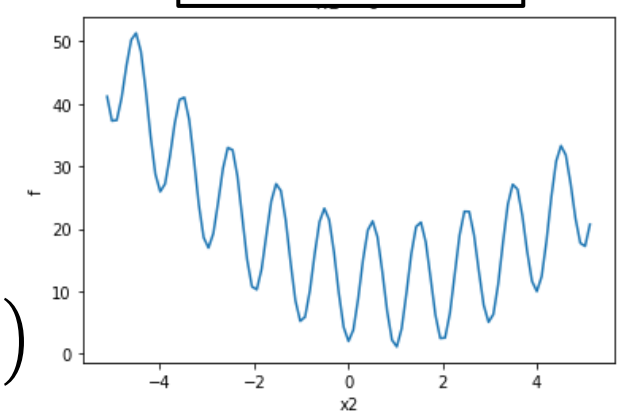
2変数の場合



x_2=0平面上



x_1=0平面上



$$f(\boldsymbol{x}) = 10n + \sum_{i=1}^{n}\left((x_i - 1)^2 - 10\cos\left(2\pi(x_i - 1)\right)\right)$$

探索範囲：$\boldsymbol{S} = [-5.12, 5.12]^n$

最適解： $\boldsymbol{x}^* = (1, \ldots, 1)$