同期モータの電圧方程式
ー③d-q回転座標系

大阪府立大学 工学研究科
清水　悠生

本記事を読む前に

- ✓ 本記事はこちらの続きです

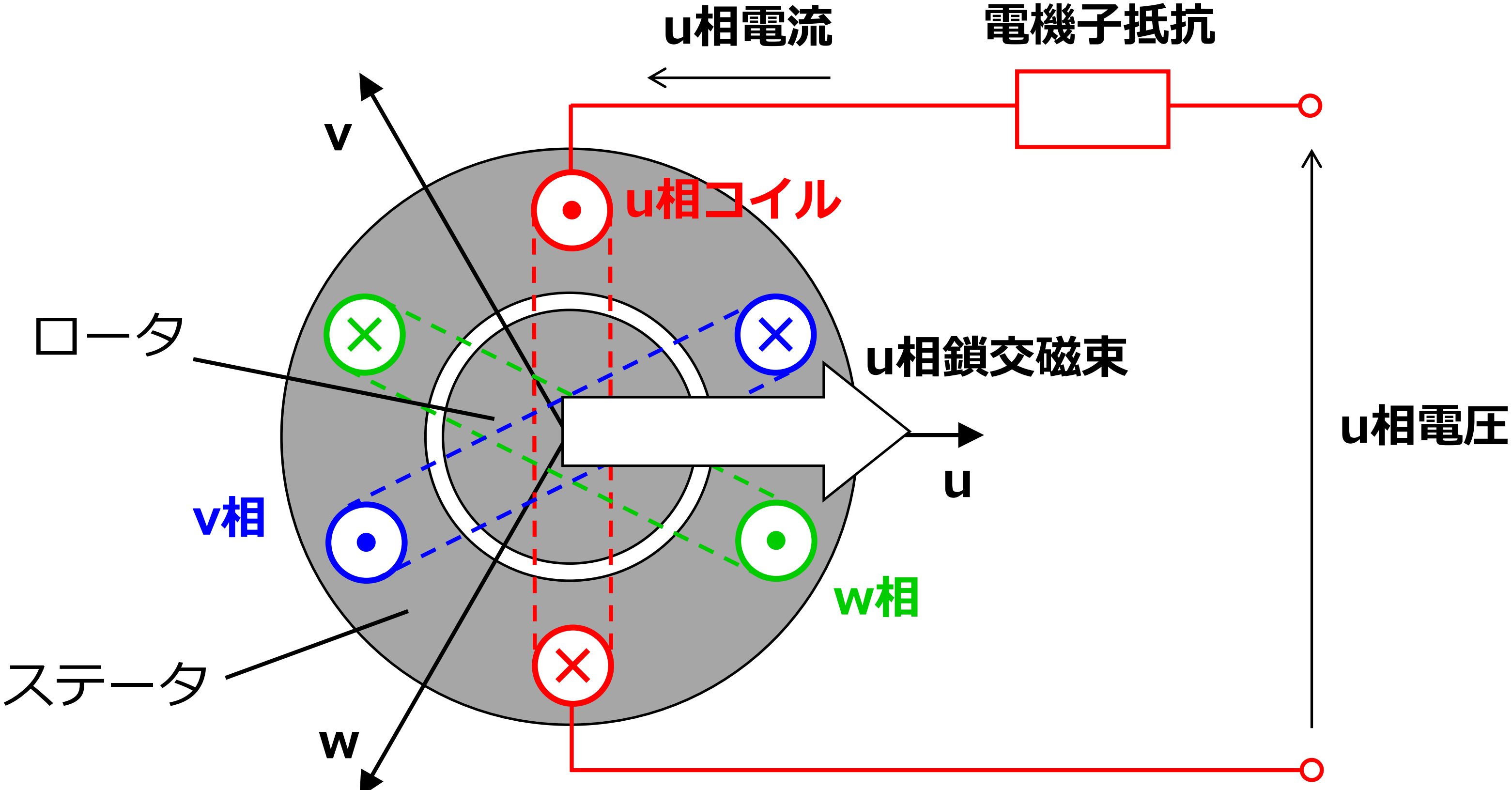
- ✓ 同期モータの電圧方程式①,②
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/10/11/voltageequation/
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/10/18/voltageequation2/

同期モータの電圧方程式

- ✓ 平衡3相交流駆動の同期モータを考える

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}$$

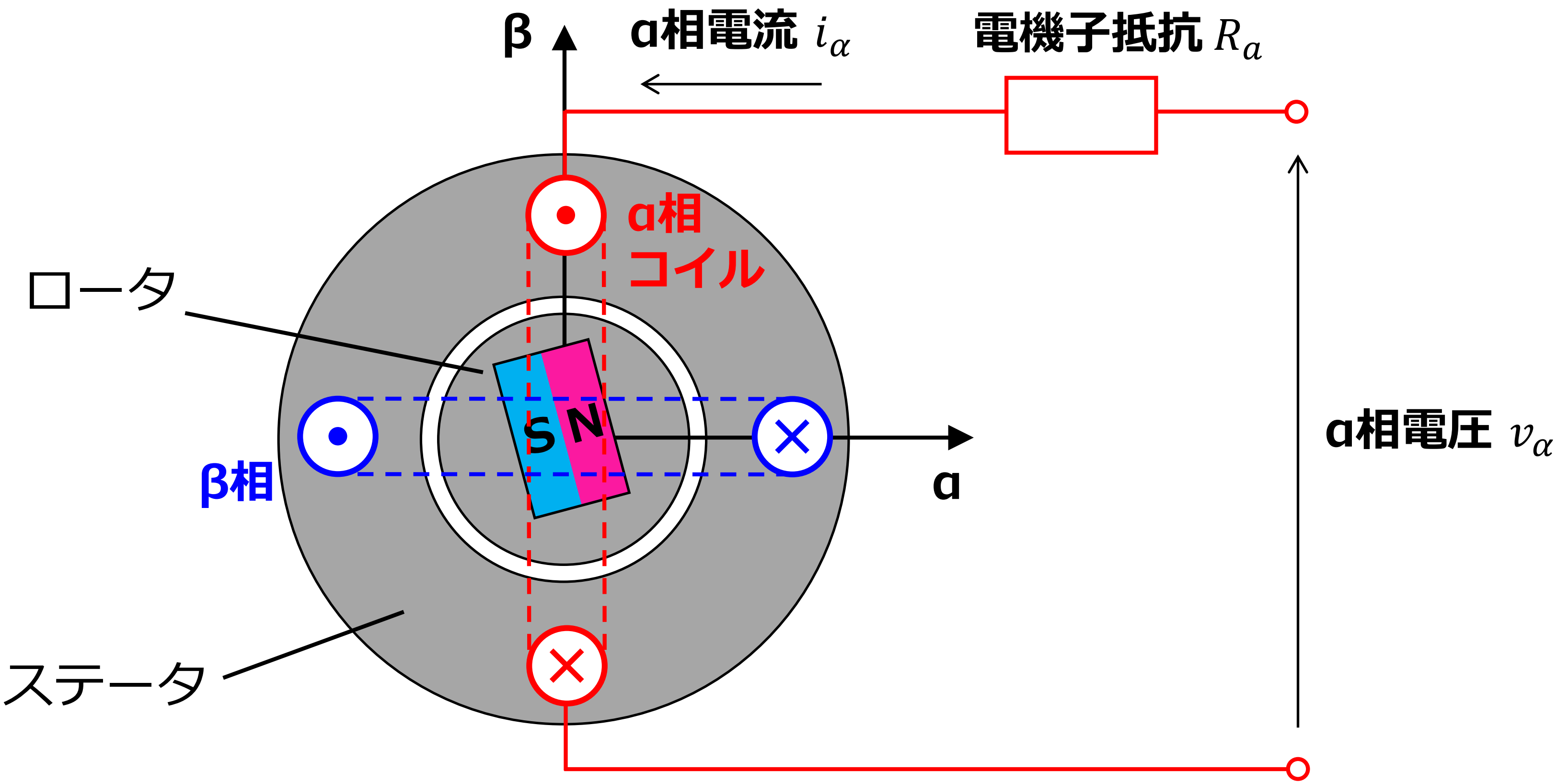
v_u, v_v, v_w ：u,v,w相電圧
i_u, i_v, i_w ：u,v,w相電流
Ψ_u, Ψ_v, Ψ_w ：u,v,w相磁束鎖交数
R_a ：電機子抵抗



α-β座標系の電圧方程式

- ✓ α,β座標系での電圧方程式は次式のように導出した

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \underbrace{R_a \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}}_{\text{電圧降下}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\left(L_0 + L_1\cos(2\omega t)\right) & \frac{d}{dt}L_1\sin(2\omega t) \\ \frac{d}{dt}L_1\sin(2\omega t) & \frac{d}{dt}\left(L_0 - L_1\cos(2\omega t)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}}_{\text{インダクタンスによる誘導起電力}} + \underbrace{\omega \Psi_a \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}}_{\text{界磁磁束による誘導起電力}}$$



α-β座標系⇒d-q回転座標系への変換

- ✓ 電圧方程式の両辺に変換行列$\boldsymbol{C}_3$を左から掛ける

定義より $C_3^T C_3 = I$

$$\boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = R_a \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\left(L_0 + L_1 \cos(2\omega t)\right) & \frac{d}{dt} L_1 \sin(2\omega t) \\ \frac{d}{dt} L_1 \sin(2\omega t) & \frac{d}{dt}\left(L_0 - L_1 \cos(2\omega t)\right) \end{bmatrix} \boldsymbol{C}_3^T \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \omega \Psi_a \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\left(L_0 + L_1 \cos(2\omega t)\right) & \frac{d}{dt} L_1 \sin(2\omega t) \\ \frac{d}{dt} L_1 \sin(2\omega t) & \frac{d}{dt}\left(L_0 - L_1 \cos(2\omega t)\right) \end{bmatrix} \boldsymbol{C}_3^T \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega \Psi_a \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$= R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \boldsymbol{C}_3 \left(L_0 \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} + L_1 \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \cos(2\omega t) & \frac{d}{dt} \sin(2\omega t) \\ \frac{d}{dt} \sin(2\omega t) & -\frac{d}{dt} \cos(2\omega t) \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{C}_3^T \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega \Psi_a \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

定数である L_0, L_1 は微分演算子 $\frac{d}{dt}$ の外に出るが
時間依存性のある C_3^T や i_d, i_q が右から掛かるため $\frac{d}{dt}$ は残る
（ここで i_d, i_q の時間依存性とは過渡状態を指している）

- ✓ 変換行列に関してはこちら↓を参照
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/07/12/dqrotatingcoordinate2/

誘導起電力の第1項目の計算

✓ 誘導起電力の第1項目は次のように計算する

$$\boldsymbol{C}_3 L_0 \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \boldsymbol{C}_3^T = L_0 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$= L_0 \begin{bmatrix} \cos(\omega t)\frac{d}{dt} & \sin(\omega t)\frac{d}{dt} \\ -\sin(\omega t)\frac{d}{dt} & \cos(\omega t)\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$= L_0 \begin{bmatrix} \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(\omega t) & -\cos(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(\omega t) & \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

積の
微分

$$= L_0 \begin{bmatrix} \cos(\omega t)\left(-\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\right) + \sin(\omega t)\left(\omega\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\right) & -\cos(\omega t)\left(\omega\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\right) + \sin(\omega t)\left(-\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\right) \\ -\sin(\omega t)\left(-\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\right) + \cos(\omega t)\left(\omega\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\right) & \sin(\omega t)\left(\omega\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\right) + \cos(\omega t)\left(-\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\right) \end{bmatrix}$$

$$= L_0 \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & -\omega \\ \omega & \frac{d}{dt} \end{bmatrix}$$

誘導起電力の第2項目の計算(1/3)

✓ 誘導起電力の第2項目は次のように計算する

$$
\boldsymbol{C}_3 L_1 \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\cos(2\omega t) & \frac{d}{dt}\sin(2\omega t) \\ \frac{d}{dt}\sin(2\omega t) & -\frac{d}{dt}\cos(2\omega t) \end{bmatrix} \boldsymbol{C}_3^T
$$

$$
= L_1 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\cos(2\omega t) & \frac{d}{dt}\sin(2\omega t) \\ \frac{d}{dt}\sin(2\omega t) & -\frac{d}{dt}\cos(2\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}
$$

$$
= L_1 \begin{bmatrix} \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(2\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(2\omega t) & \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(2\omega t) - \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(2\omega t) \\ -\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(2\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(2\omega t) & -\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(2\omega t) - \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(2\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}
$$

$$
= L_1 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}
$$

✓ 各成分を変数表示する

誘導起電力の第2項目の計算(2/3)

- ✓ 各成分は次のように計算する

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\cos(2\omega t)\cos(\omega t)} + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\sin(2\omega t)\cos(\omega t)} \\
&\quad +\cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\sin(2\omega t)\sin(\omega t)} - \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\cos(2\omega t)\sin(\omega t)} \\
&= \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\cos(3\omega t) + \cos(\omega t)\big)} + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\sin(3\omega t) + \sin(\omega t)\big)} \\
&\quad +\cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(-\cos(3\omega t) + \cos(\omega t)\big)} - \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\sin(3\omega t) - \sin(\omega t)\big)} \\
&= \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(\omega t) \\
&= \cos(\omega t)\left(-\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\right) + \sin(\omega t)\left(\omega\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dt}
\end{aligned}
$$

積の微分

$$
\begin{aligned}
A_{21} &= -\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\cos(2\omega t)\cos(\omega t)} + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\sin(2\omega t)\cos(\omega t)} \\
&\quad -\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\sin(2\omega t)\sin(\omega t)} - \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\cos(2\omega t)\sin(\omega t)} \\
&= -\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\cos(3\omega t) + \cos(\omega t)\big)} + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\sin(3\omega t) + \sin(\omega t)\big)} \\
&\quad -\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(-\cos(3\omega t) + \cos(\omega t)\big)} - \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\sin(3\omega t) - \sin(\omega t)\big)} \\
&= -\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(\omega t) \\
&= -\sin(\omega t)\left(-\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\right) + \cos(\omega t)\left(\omega\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\right) = \omega
\end{aligned}
$$

積の微分

誘導起電力の第2項目の計算(3/3)

✓ つづき

$$
\begin{aligned}
A_{12} &= -\cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\cos(2\omega t)\sin(\omega t)} - \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\sin(2\omega t)\sin(\omega t)} \\
&\quad +\cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\sin(2\omega t)\cos(\omega t)} - \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\cos(2\omega t)\cos(\omega t)} \\
&= -\cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\sin(3\omega t) - \sin(\omega t)\big)} - \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(-\cos(3\omega t) + \cos(\omega t)\big)} \\
&\quad +\cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\sin(3\omega t) + \sin(\omega t)\big)} - \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\cos(3\omega t) + \cos(\omega t)\big)} \\
&= \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(\omega t) - \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(\omega t) \\
&= \cos(\omega t)\left(\omega\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\right) - \sin(\omega t)\left(-\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\right) = \omega
\end{aligned}
$$

積の微分

$$
\begin{aligned}
A_{22} &= \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\cos(2\omega t)\sin(\omega t)} - \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\sin(2\omega t)\sin(\omega t)} \\
&\quad -\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\sin(2\omega t)\cos(\omega t)} - \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\cos(2\omega t)\cos(\omega t)} \\
&= \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\sin(3\omega t) - \sin(\omega t)\big)} - \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(-\cos(3\omega t) + \cos(\omega t)\big)} \\
&\quad -\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\sin(3\omega t) + \sin(\omega t)\big)} - \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\underline{\frac{1}{2}\big(\cos(3\omega t) + \cos(\omega t)\big)} \\
&= -\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\sin(\omega t) - \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\cos(\omega t) \\
&= -\sin(\omega t)\left(\omega\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\frac{d}{dt}\right) - \cos(\omega t)\left(-\omega\sin(\omega t) + \cos(\omega t)\frac{d}{dt}\right) = -\frac{d}{dt}
\end{aligned}
$$

積の微分

誘導起電力の第1,2項のまとめ

✓ これまでの計算をまとめると次式のとおり

$$\boldsymbol{C}_3\left(L_0\begin{bmatrix}\frac{d}{dt} & 0\\ 0 & \frac{d}{dt}\end{bmatrix}+L_1\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}\cos(2\omega t) & \frac{d}{dt}\sin(2\omega t)\\ \frac{d}{dt}\sin(2\omega t) & -\frac{d}{dt}\cos(2\omega t)\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{C}_3^T$$

$$=L_0\begin{bmatrix}\frac{d}{dt} & -\omega\\ \omega & \frac{d}{dt}\end{bmatrix}+L_1\begin{bmatrix}\frac{d}{dt} & \omega\\ \omega & -\frac{d}{dt}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(L_0+L_1)\frac{d}{dt} & -\omega(L_0-L_1)\\ \omega(L_0+L_1) & (L_0-L_1)\frac{d}{dt}\end{bmatrix}$$

界磁磁束の計算

✓ 界磁磁束ベクトルの変換式は下記のようになる

$$\omega \Psi_a \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$= \omega \Psi_a \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$= \omega \Psi_a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \Psi_a \end{bmatrix}$$

d-q回転座標系における電圧方程式

✓ 以上をまとめる

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \boldsymbol{C}_3 \left(L_0 \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} + L_1 \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\cos(2\omega t) & \frac{d}{dt}\sin(2\omega t) \\ \frac{d}{dt}\sin(2\omega t) & -\frac{d}{dt}\cos(2\omega t) \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{C}_3^T \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega \Psi_a \boldsymbol{C}_3 \begin{bmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$= R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (L_0 + L_1)\frac{d}{dt} & -(L_0 - L_1)\omega \\ (L_0 + L_1)\omega & (L_0 - L_1)\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \Psi_a \end{bmatrix}$$

$$= R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d \frac{d}{dt} & -\omega L_q \\ \omega L_d & L_q \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \Psi_a \end{bmatrix}$$

$$= R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega L_q i_q \\ \omega L_d i_d + \omega \Psi_a \end{bmatrix}$$

ここで，**d,q軸インダクタンス**L_d, L_qは次式のように**時間に依存しない定数**として定義できる

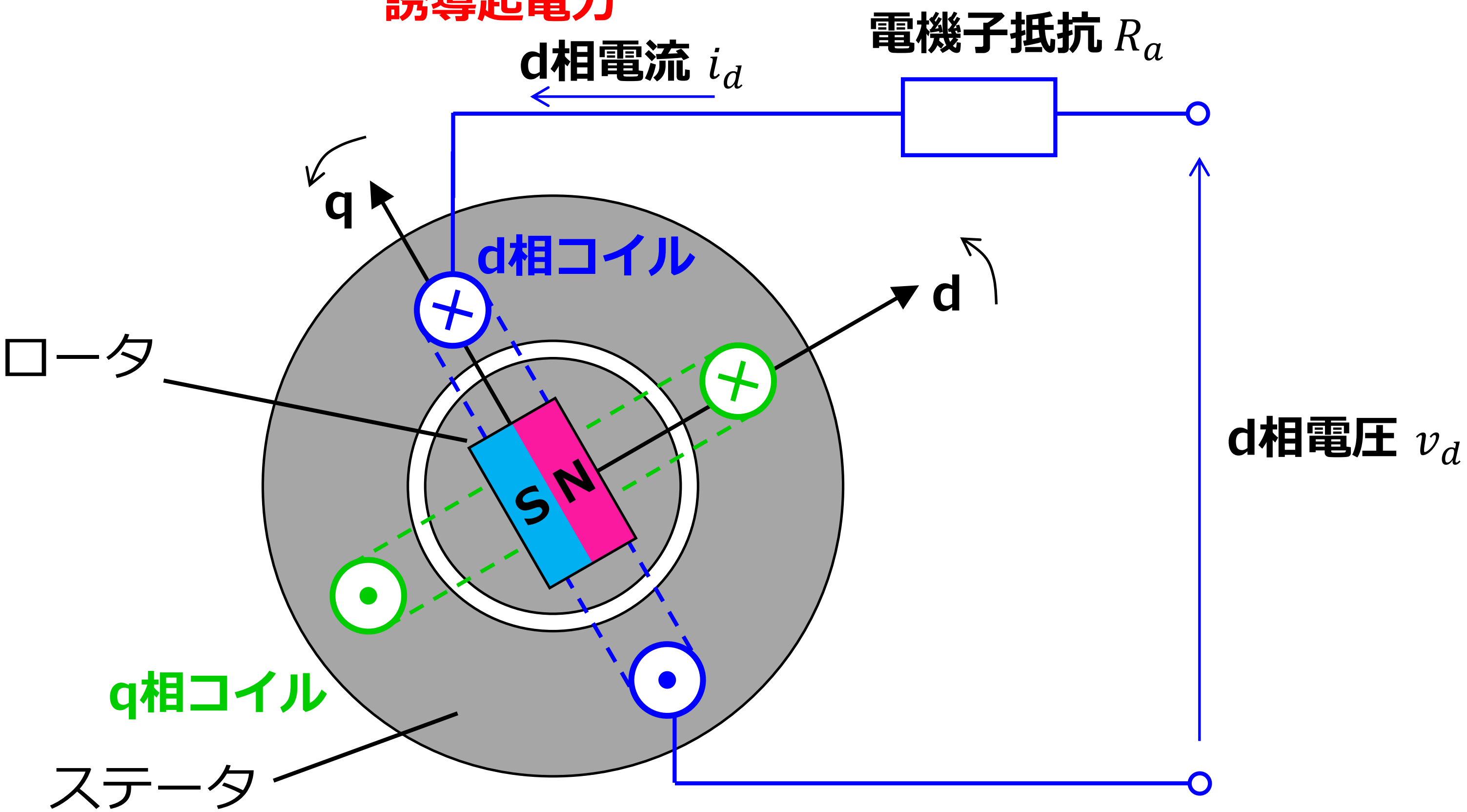
$$L_d = L_0 + L_1 = l_a + \frac{3}{2} L_a - \frac{3}{2} L_{as}$$

$$L_q = L_0 - L_1 = l_a + \frac{3}{2} L_a + \frac{3}{2} L_{as}$$

d-q回転座標系の電圧方程式の解釈

- ✓ 電圧方程式から，図のような回転子に同期して回転するd,q相コイルが考えられる

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \underbrace{R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}}_{\text{電圧降下}} + \underbrace{\begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}}_{\text{非定常状態の誘導起電力}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\omega L_q i_q \\ \omega L_d i_d + \omega \Psi_a \end{bmatrix}}_{\text{定常状態の誘導起電力}}$$

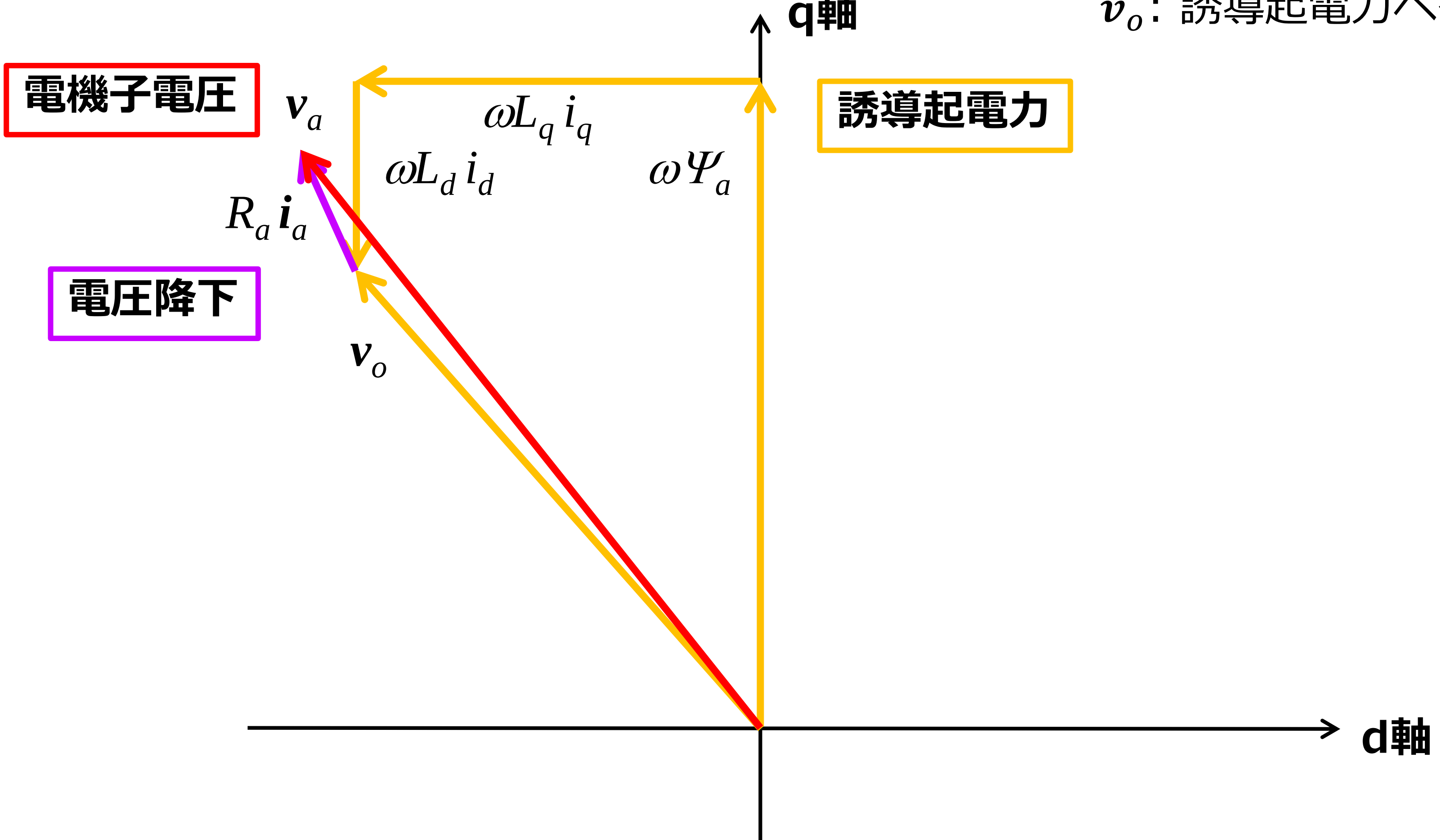


d-q座標上の定常状態のベクトル図

- ✓ d,q軸電流の時間変化がない定常状態では電圧方程式とベクトル図は下のようになる

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega L_q i_q \\ \omega L_d i_d + \omega \Psi_a \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_a = R_a \boldsymbol{i}_a + \boldsymbol{v}_o$$

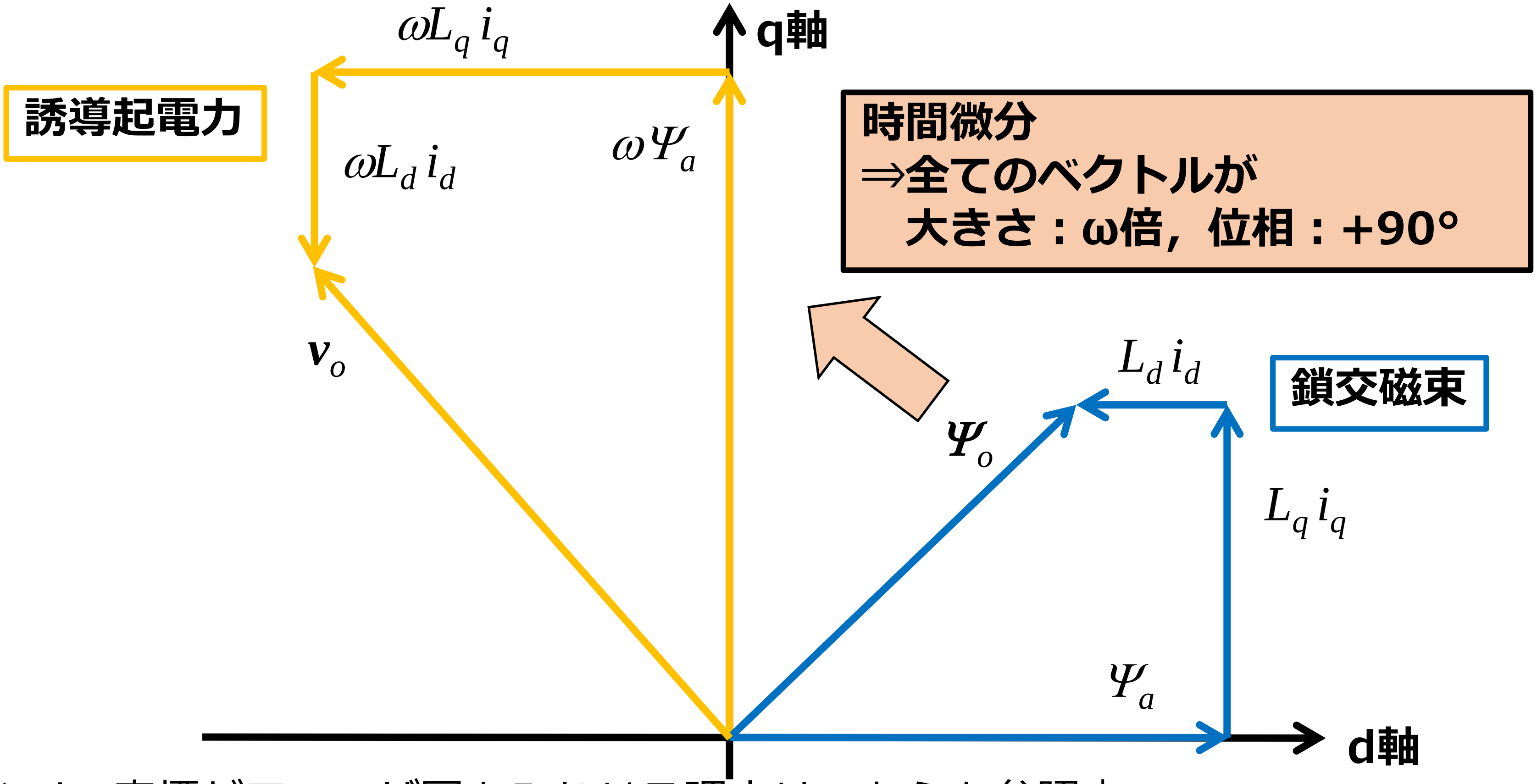
$\boldsymbol{v}_a$: 電機子電圧ベクトル
$\boldsymbol{i}_a$: 電機子電流ベクトル
$\boldsymbol{v}_o$: 誘導起電力ベクトル



d-q座標上の鎖交磁束と誘導起電力の関係

- ✓ 鎖交磁束の微分から誘導起電力は導出されるため
  ベクトルが全て大きさ：ω倍，位相：+90°となる

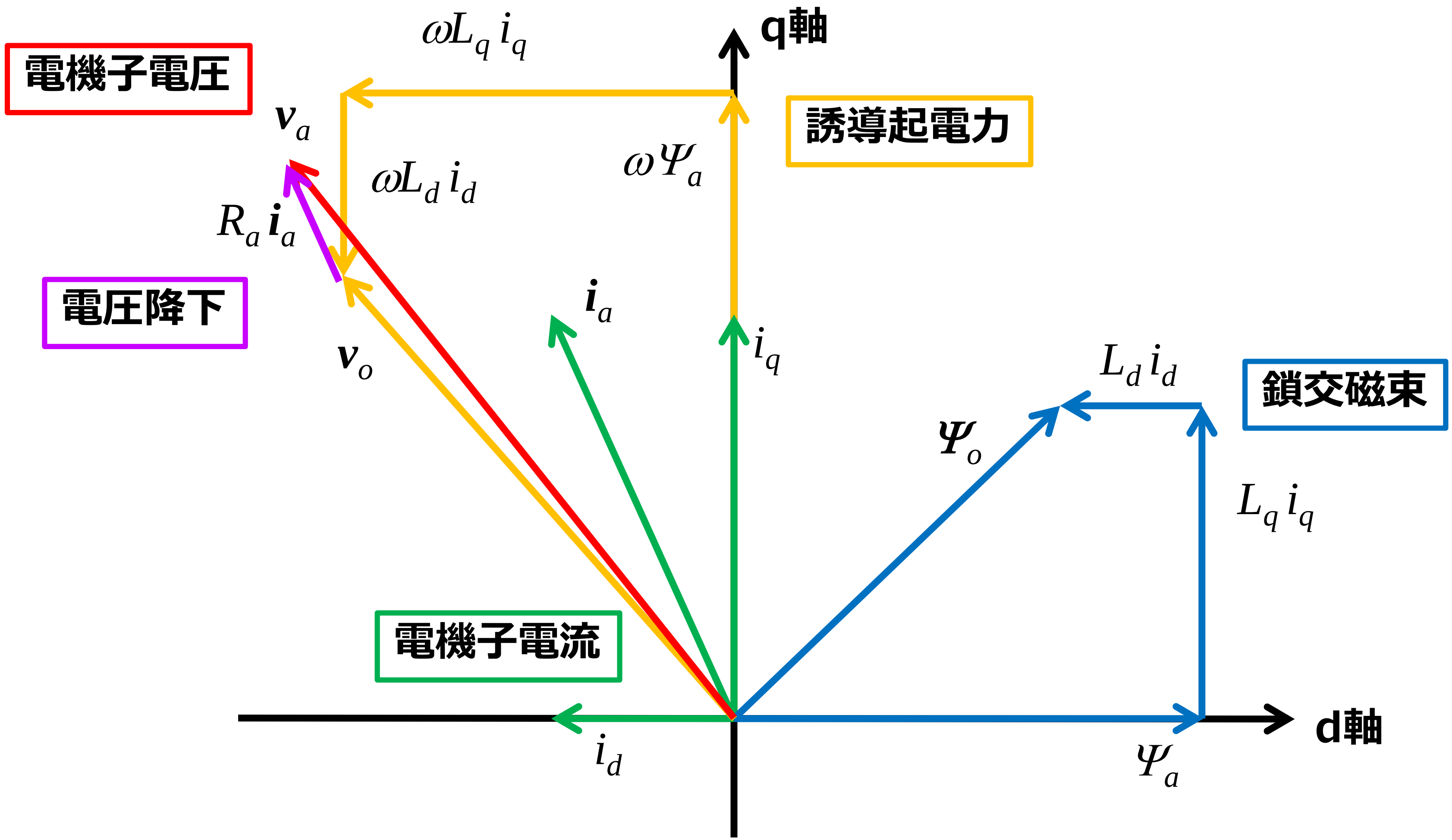
座標軸自体が角速度ωで回転しているため
フェーザ図(複素数平面)のように考えられる



- ✓ d-q座標がフェーザ図とみなせる理由はこちらも参照↓
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/10/04/motorphase/

d-q回転座標系の定常状態のベクトル図

✓ 電流ベクトルも追加するとこのようなベクトル図に



d-q回転座標系の非定常状態のベクトル図

✓ 例えば $\frac{d}{dt}i_d < 0, \frac{d}{dt}i_q > 0$ のときの非定常(過渡)状態では
ベクトル図は下図のようになる

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega L_q i_q \\ \omega L_d i_d + \omega \Psi_a \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_a = R_a \boldsymbol{i}_a + p \boldsymbol{L}_a \boldsymbol{i}_a + \boldsymbol{v}_o$$

p：時間微分演算子
$\boldsymbol{L}_a$：インダクタンス行列