同期モータの電圧方程式
ー①3相座標系のインダクタンス

大阪府立大学 工学研究科
清水　悠生

本記事を読む前に

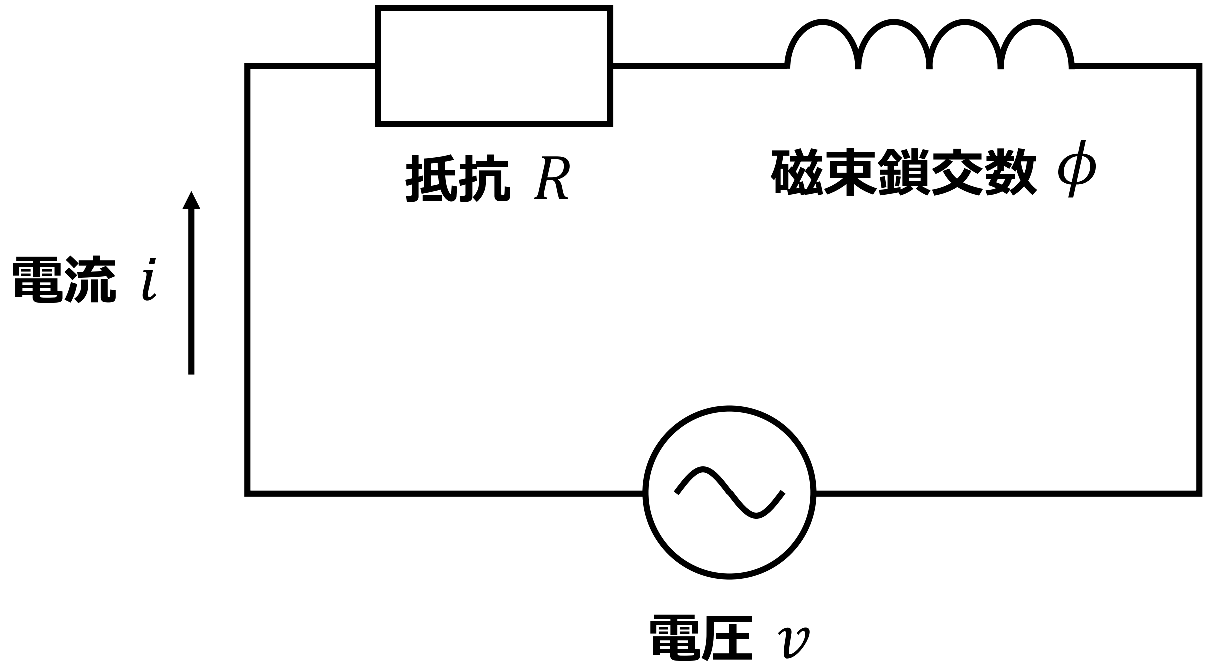
- ✓ d-q回転座標系の記事を読んでいる方が
  より理解できると思いますので
  是非↓の記事も読んでみてください

- ✓ d-q回転座標系のお話①-③
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/07/05/dqrotatingcoordinate1/
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/07/12/dqrotatingcoordinate2/
- ✓ https://yuyumoyuyu.com/2020/07/19/dqcrotatingroordinate3/

電圧方程式とは

✓ キルヒホッフの第二法則より導かれる電圧の等式をモータに適用したものを電圧方程式と呼ぶ

$$v = \underbrace{Ri}_{\text{電圧降下}} + \underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{\text{誘導起電力}}$$

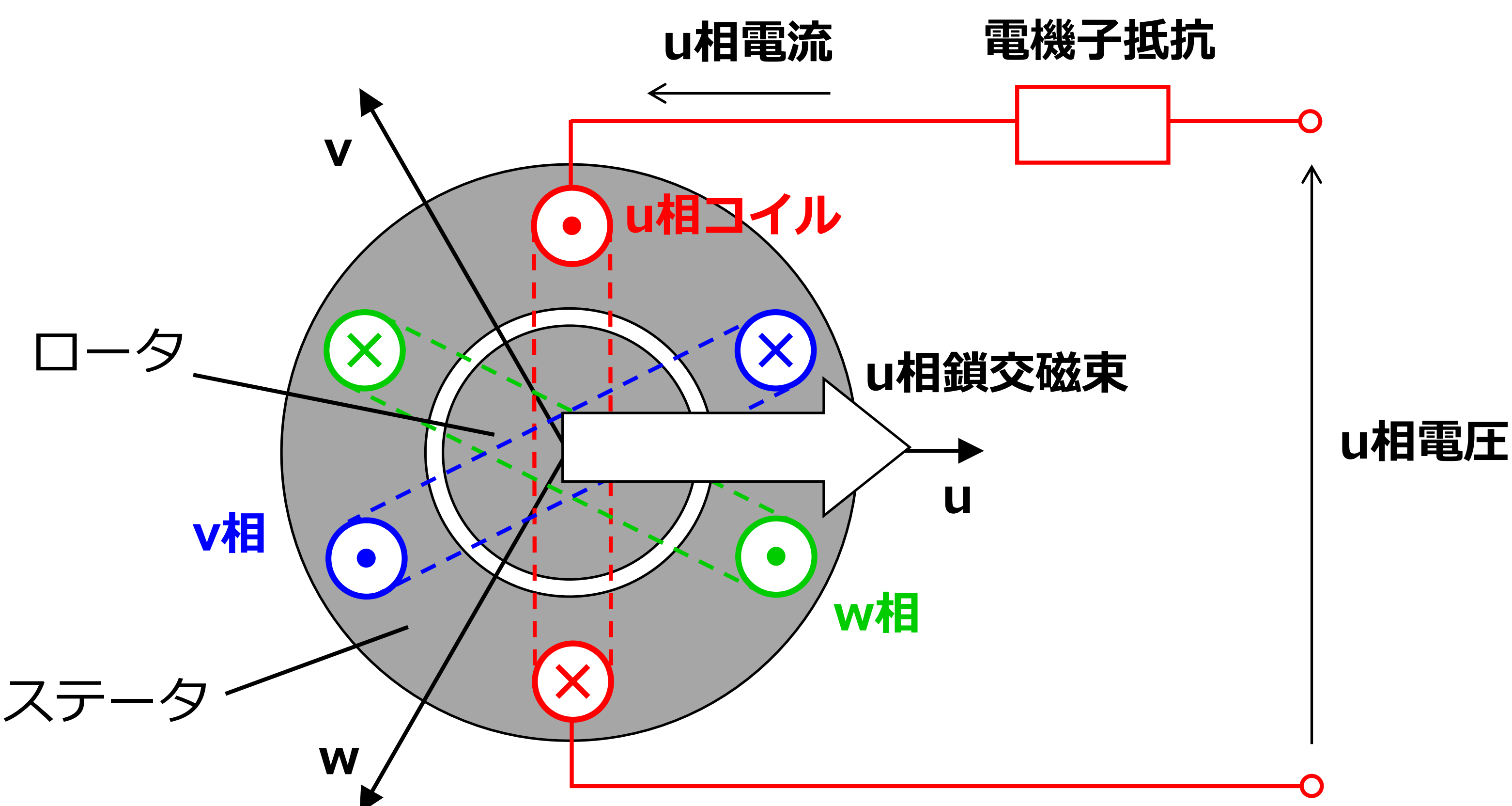


同期モータの電圧方程式

✓ 平衡3相交流駆動の同期モータを考える

$$\begin{bmatrix} v_u \\ v_v \\ v_w \end{bmatrix} = R_a \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}$$

v_u, v_v, v_w ：u,v,w相電圧
i_u, i_v, i_w ：u,v,w相電流
Ψ_u, Ψ_v, Ψ_w ：u,v,w相磁束鎖交数
R_a ：電機子抵抗

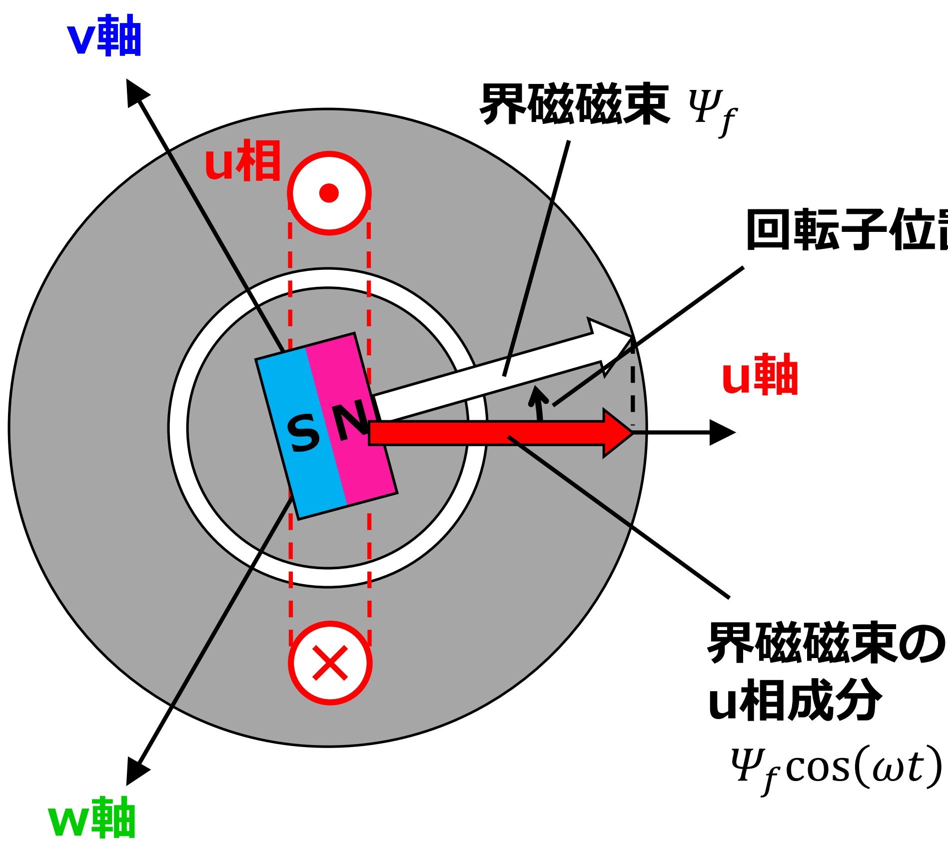


u相鎖交磁束

- ✓ u相の磁束鎖交数はu相電流による自己誘導と v,w相電流による相互誘導による磁束，界磁磁束から成る

$$\Psi_u = \underbrace{L_u i_u}_{\text{自己誘導}} + \underbrace{M_{vu} i_v + M_{wu} i_w}_{\text{相互誘導}} + \underbrace{\Psi_f \cos(\omega t)}_{\text{界磁磁束}}$$

L_u：u相自己インダクタンス
M_{vu}, M_{wu}：v-u,w-u相間相互インダクタンス



u,v,w相鎖交磁束

- ✓ v,w相の磁束鎖交数も同様に表されるため
  磁束鎖交数ベクトルはインダクタンス行列で表現できる

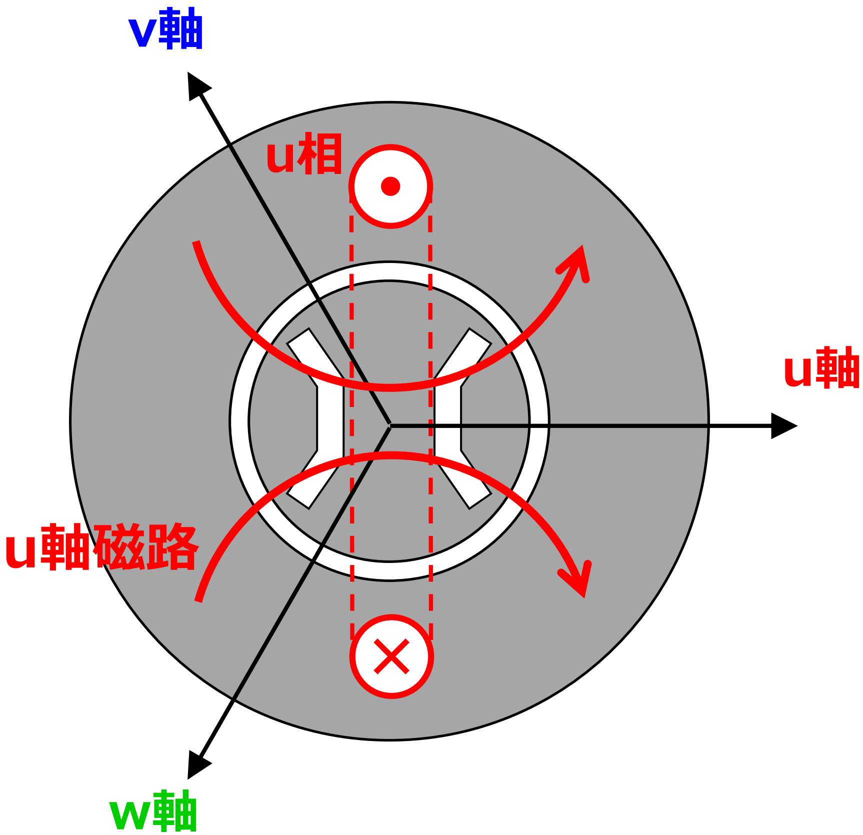
$$\begin{cases} \Psi_u = L_u i_u + M_{vu} i_v + M_{wu} i_w + \Psi_f \cos(\omega t) \\ \Psi_v = M_{uv} i_u + L_v i_v + M_{wv} i_w + \Psi_f \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \Psi_w = M_{uw} i_u + M_{vw} i_v + L_w i_w + \Psi_f \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_u & M_{vu} & M_{wu} \\ M_{uv} & L_v & M_{wv} \\ M_{uw} & M_{vw} & L_w \end{bmatrix}}_{\text{インダクタンス行列}} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi_f \cos(\omega t) \\ \Psi_f \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \Psi_f \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}}_{\text{界磁磁束ベクトル}}$$

自己インダクタンスは回転子位置で変化する

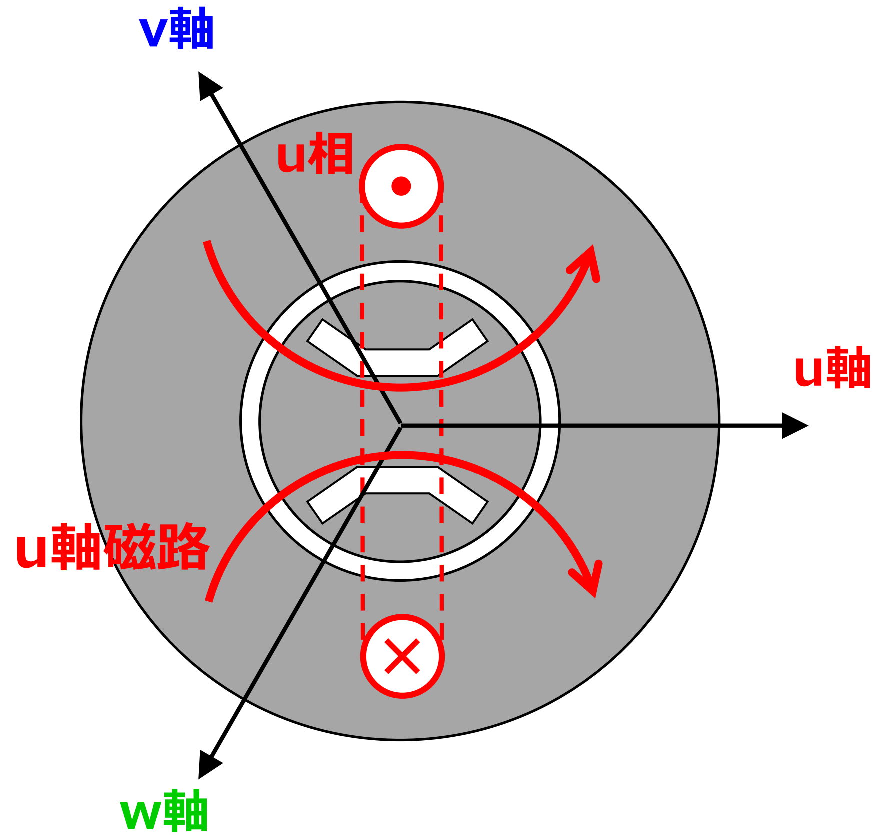
✓ 突極性を有するモータでは
u,v,w相インダクタンスは回転子位置により変化する

回転子位置 $\omega t = 0°$(電気角)



磁気抵抗が大きく磁束が通りづらい
⇒インダクタンスが小さい

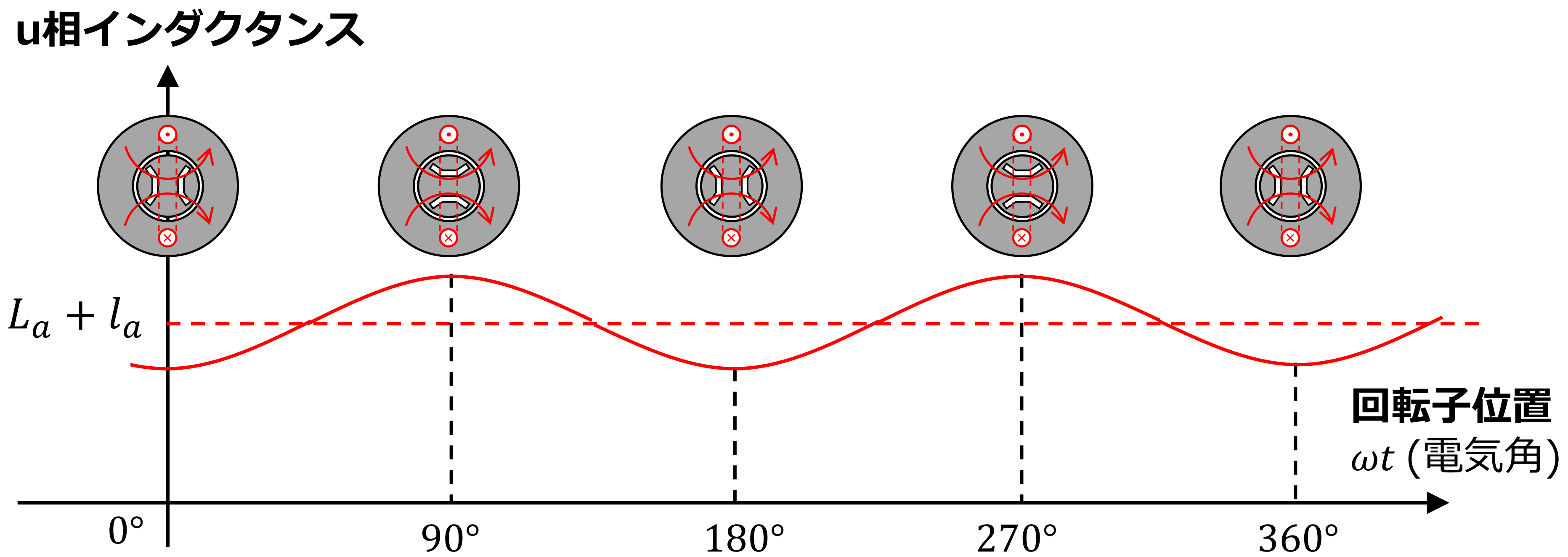
回転子位置 $\omega t = 90°$(電気角)



磁気抵抗が小さく磁束が通りやすい
⇒インダクタンスが大きい

u相自己インダクタンスの周期性

- ✓ u相インダクタンスはモータ形状により決定され
  極性に依存しないため
  周期は入力電力の周期の半分（電気角180°で1周）



u相インダクタンスの数式表現(基本波)

$$L_u = l_a + L_a - L_{as}\cos(2\omega t)$$

l_a：漏れインダクタンス
L_a：有効インダクタンスの平均値
L_{as}：有効インダクタンスの
高調波振幅

自己インダクタンスの周期性

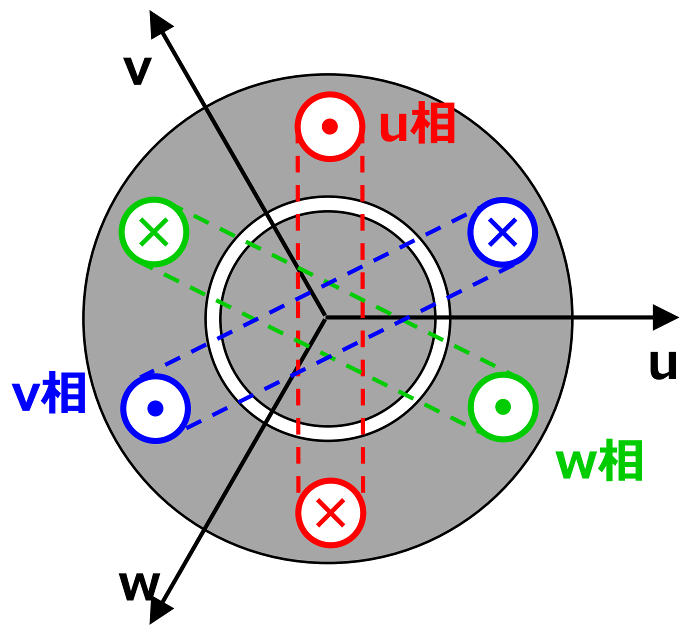
✓ u,v,w相インダクタンスは以下のように定義できる

$$L_u = l_a + L_a - L_{as}\cos(2\omega t)$$

$$L_v = l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$L_w = l_a + L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

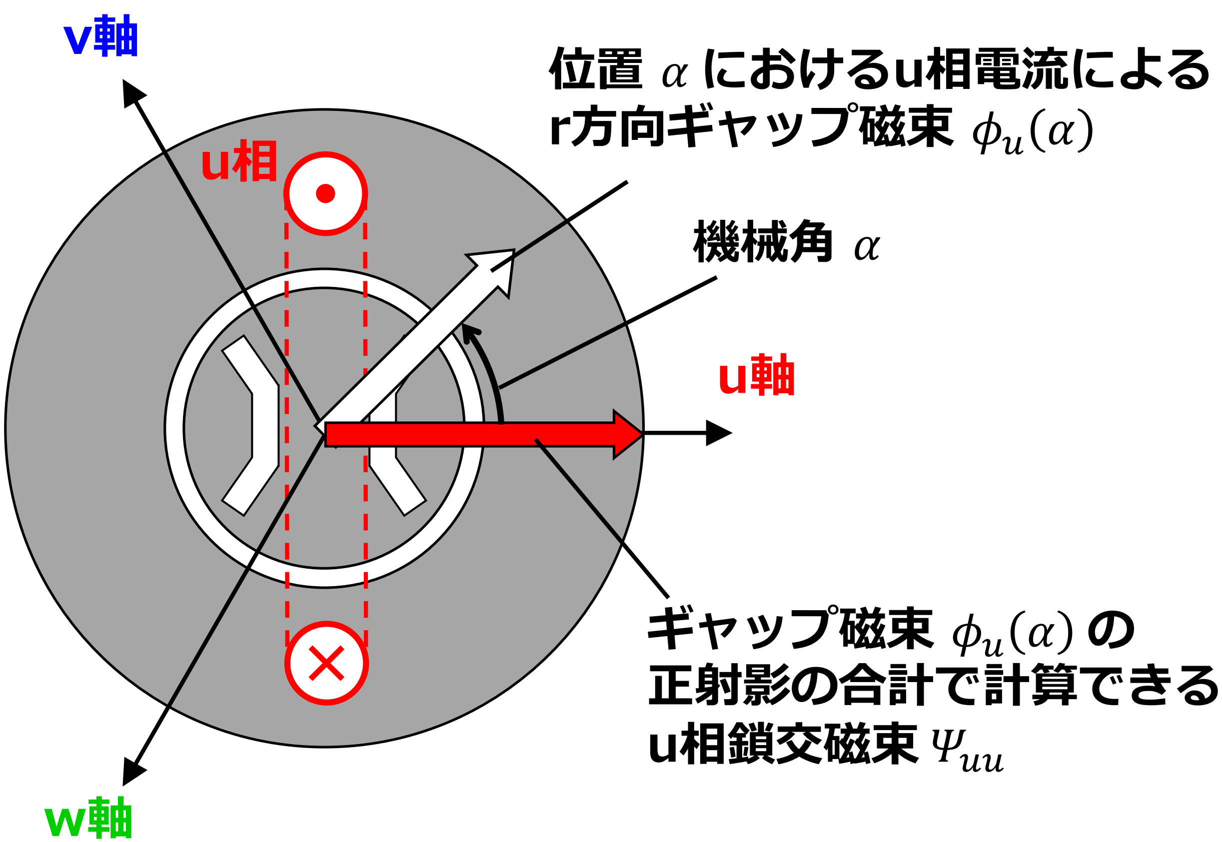
反時計回りを
正の回転方向と
しているため



u相電流によるu相鎖交磁束

- ✓ u相巻線のみ通電している場合のu相鎖交磁束は次式のように計算できる

$$\Psi_{uu} = i_u \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi_u(\alpha) \cos\alpha \, d\alpha$$



u相電流によるギャップ磁束

✓ 定義したu相自己インダクタンスから
u相巻線のみ通電している場合のu相鎖交磁束は
漏れインダクタンスを無視すると次式の通り

$$\Psi_{uu} = L_u i_u = \underline{\big(L_a - L_{as}\cos(2\omega t)\big)} i_u$$

よって，次式のように$\phi_u(\alpha)$をおくと

$$\phi_u(\alpha) = \frac{2L_a}{\pi}\cos\alpha + \frac{2L_{as}}{\pi}\big(\cos(\alpha - 2\omega t)\big)$$

積和の公式

$$\begin{aligned}
\Psi_{uu} &= i_u \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi_u(\alpha)\cos\alpha d\alpha \\
&= i_u \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{L_a}{\pi}\big(1 + \cos(2\alpha)\big) + \frac{L_{as}}{\pi}\big(\cos(2\alpha - 2\omega t) - \cos(2\omega t)\big)\right) d\alpha \\
&= \underline{\big(L_a - L_{as}\cos(2\omega t)\big)} i_u
\end{aligned}$$

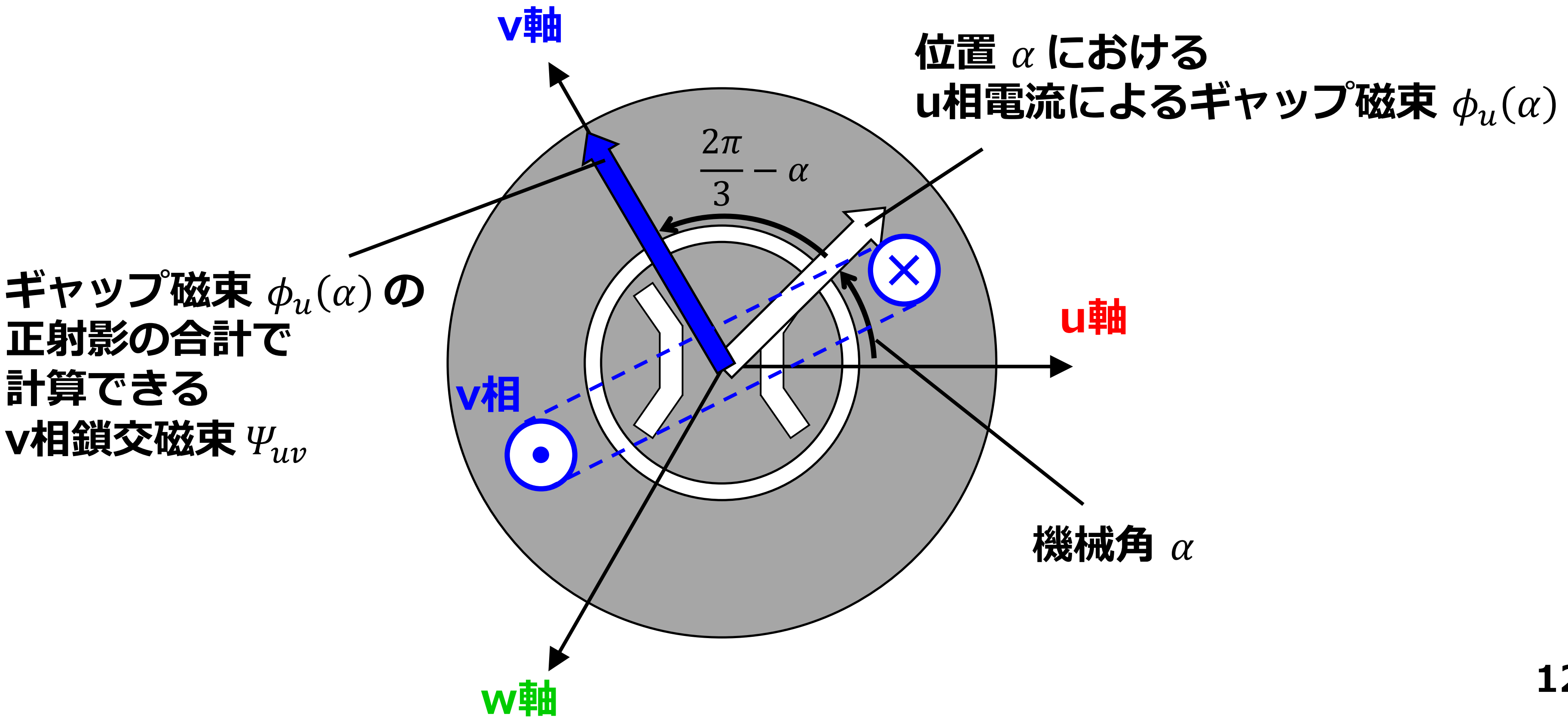
となり，インダクタンスの定義と一致する

（22/01/25追記）
本頁の$\phi_u(\alpha)$は相互インダクタンス計算のために導入しましたが，不正確です。
相互インダクタンス導出に関してはこちら↓を参照してください。
https://yuyumoyuyu.com/2022/01/23/voltageequation5/

u相電流によるv相鎖交磁束

- ✓ 同様にu相巻線のみ通電している場合のv相鎖交磁束は次式のように計算できる

$$\Psi_{uv} = i_u \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi_u(\alpha) \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) d\alpha$$



相互インダクタンスの導出

✓ u相電流によるv相鎖交磁束を計算すると

積和の公式

$$\Psi_{uv} = i_u \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi_u(\alpha)\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) d\alpha$$

$$= i_u \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{L_a}{\pi}\left(\cos\left(2\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\frac{2\pi}{3}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{L_{as}}{\pi}\left(\cos\left(2\alpha - 2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(-2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\right) d\alpha$$

$$= \left(L_a \cos\frac{2\pi}{3} - L_{as}\cos\left(-2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right) i_u$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\right)}_{\text{相互インダクタンス } M_{uv}} i_u$$

となり，u-v間相互インダクタンスが求められる

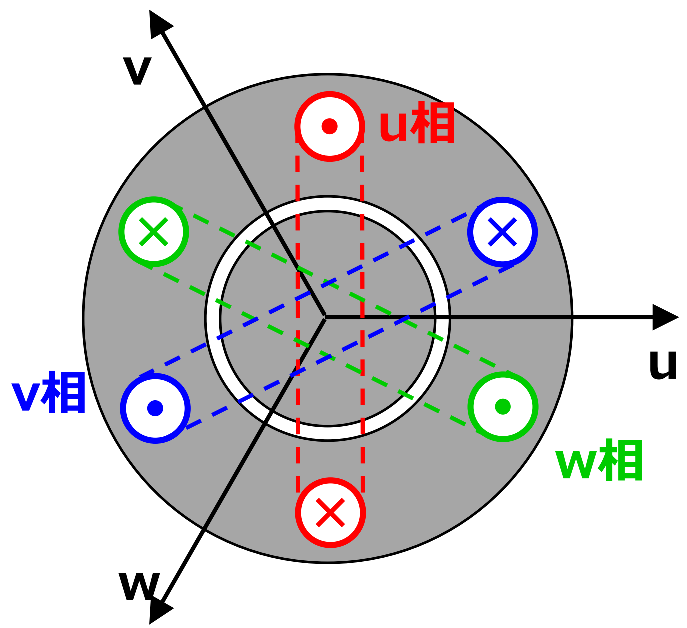
相互インダクタンスの周期性

- ✓ 同様に相互インダクタンスを計算すると次式のとおり

$$M_{uv} = M_{vu} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

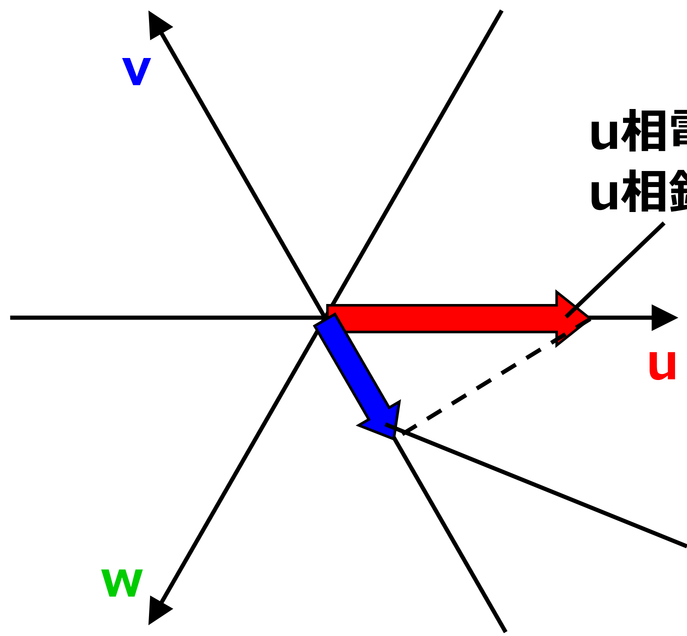
$$M_{vw} = M_{wv} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos(2\omega t)$$

$$M_{wu} = M_{uw} = -\frac{1}{2}L_a - L_{as}\cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$



非突極モータは理解しやすい

- ✓ u,v,w相自己インダクタンスと相互インダクタンスの直流成分（非突極時）の関係は下記のように考えられる



u相電流よる
u相鎖交磁束の直流成分 $\Psi_{u\_dc} = L_u i_u$

u相電流よる
v相鎖交磁束の直流成分

$$\Psi_{u\_dc}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = M_{uv} i_u$$

非突極時のインダクタンス

$$L_u = L_v = L_w = L_a$$

$$M_{uv} = M_{vu} = M_{vw} = M_{wv} = M_{wu} = M_{uw} = L_a\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}L_a$$