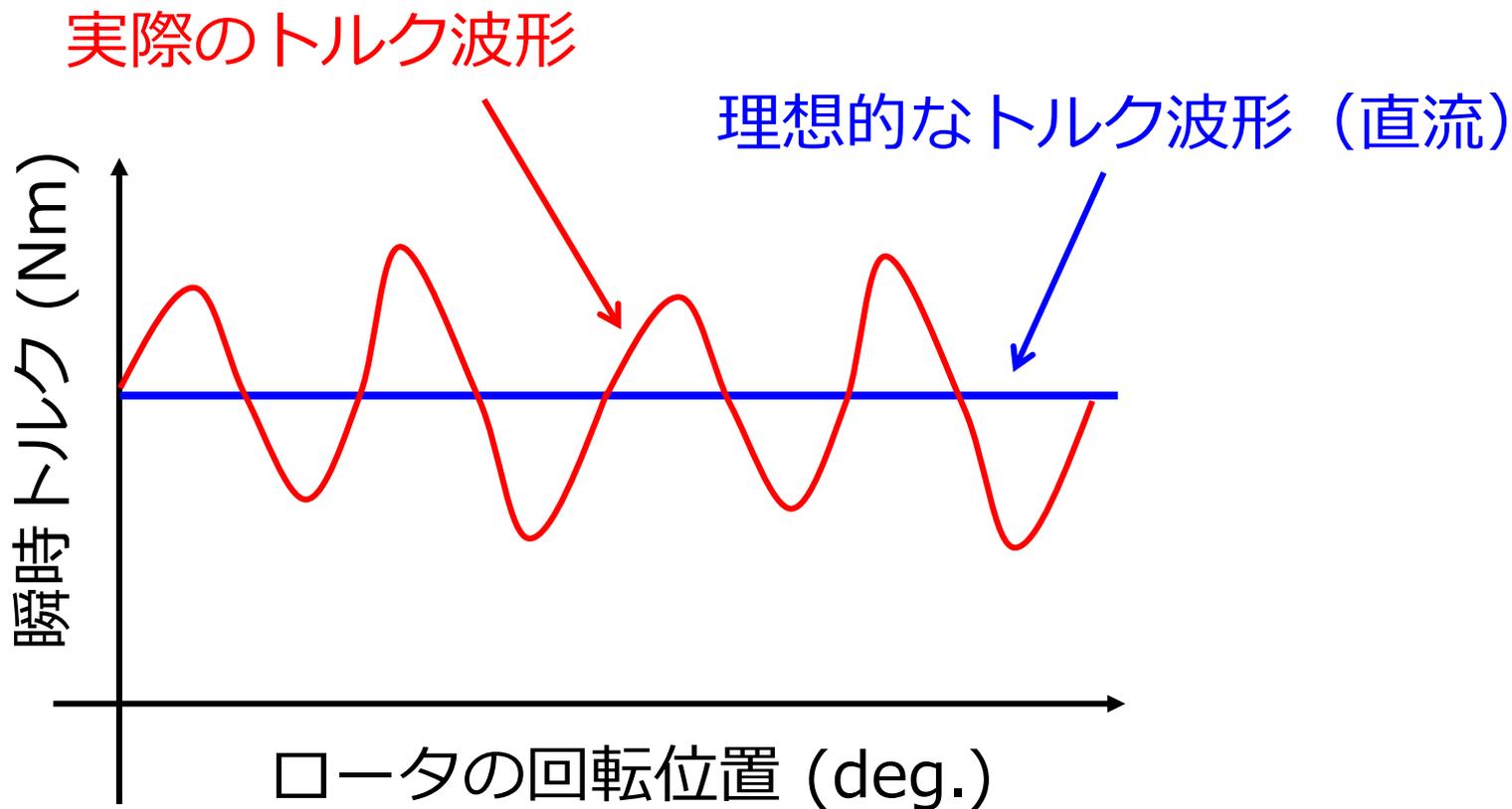


なぜトルクリプルは 6の倍数次高調波として出現するのか

大阪府立大学 工学研究科
清水 悠生

トルクリプルとは

- ✓ トルクリプルとはモータに発生するトルクの高調波のこと
- ✓ モータを含む動力伝達機構の振動(Noise)や騒音(Vibration)の原因に



トルクリプルの発生要因

- ✓ トルクリプルの発生要因は下記のようなものが存在^[1]

■ 進行波

- ステータの回転磁界に重畳する高調波
⇒回転磁界が磁気飽和等の影響により
空間的に理想的な正弦波でなくなってしまう
- ロータの起磁力に含まれる高調波
⇒ロータの磁石配置等により起磁力に高調波が含まれる

■ 定在波

- 相帯角（=巻線同士の空間的な角度）による高調波
⇒電機子電流の高調波による磁界は同期して回転しない
- スロット（=巻線を巻くための空間）による高調波
⇒スロット部と鉄心部では磁気抵抗が異なる

- ✓ トルクリプルの発生メカニズムは未だ完全には
解明されていない（'20/08時点）

要因がわからなくても状態はわかる

- ✓ トルクリップルの発生要因は様々だが、
平衡三相交流駆動のACモータの場合、
高調波の次数は6の倍数であることが知られている

- ✓ よく見かける説明はこんな感じ

*電機子鎖交磁束 (or誘起電圧) の $6n \pm 1$ 次高調波により、
 $6n$ 次のトルク高調波が発生する*

- ✓ これをきちんと導出していきます
- ✓ ※以降の計算は前スライドの起磁力高調波のみを
対象としています

電機子鎖交磁束の高調波を考える

- ✓ 電流は理想的な三相平衡交流とし、
電機子鎖交磁束に奇数次高調波が含まれる場合を考える
- ✓ 座標変換については下記を参照

<https://yuyumoyuyu.com/2020/07/12/dqrotatingcoordinate2/>

$$\Psi_o = \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix}$$

Ψ_o : 電機子鎖交磁束ベクトル

Ψ_d, Ψ_q : Ψ_o のd,q軸成分

Ψ_u, Ψ_v, Ψ_w : u,v,w相電機子鎖交磁束

Ψ_k, γ_k : u,v,w相電機子鎖交磁束の

k次高調波成分の振幅と位相

$$\begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \end{bmatrix} = \sum_{\substack{k=2n-1 \\ n \in \mathbb{N}}} \begin{bmatrix} \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \\ \Psi_k \cos\left(k\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + \gamma_k\right) \\ \Psi_k \cos\left(k\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) + \gamma_k\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Psi_1 \cos(\omega t + \gamma_1) + \Psi_3 \cos(3\omega t + \gamma_3) + \Psi_5 \cos(5\omega t + \gamma_5) + \dots \\ \Psi_1 \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi + \gamma_1\right) + \Psi_3 \cos\left(3\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + \gamma_3\right) + \Psi_5 \cos\left(5\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + \gamma_5\right) + \dots \\ \Psi_1 \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi + \gamma_1\right) + \Psi_3 \cos\left(3\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) + \gamma_3\right) + \Psi_5 \cos\left(5\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) + \gamma_5\right) + \dots \end{bmatrix}$$

電機子鎖交磁束の高調波のd,q軸成分 (1/4)

✓ $k=3m$ ($m=1,3,5,\dots$) (奇数かつ3の倍数) の場合

$$\begin{bmatrix} \Psi_{uk} \\ \Psi_{vk} \\ \Psi_{wk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \\ \Psi_k \cos\left(k\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + \gamma_k\right) \\ \Psi_k \cos\left(k\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) + \gamma_k\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \\ \Psi_k \cos(k\omega t - 2\pi m + \gamma_k) \\ \Psi_k \cos(k\omega t + 2\pi m + \gamma_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \\ \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \\ \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \end{bmatrix}$$

となるから

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Psi_{dk} \\ \Psi_{qk} \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{uk} \\ \Psi_{vk} \\ \Psi_{wk} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) - \frac{1}{2}\Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) - \frac{1}{2}\Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \\ 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) - \frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

より、電機子鎖交磁束の3の倍数次高調波はd,q軸上には表れない。

電機子鎖交磁束の高調波のd,q軸成分 (2/4)

✓ $k=6n\pm 1$ ($n=1,2,3,\dots$) (奇数かつ3の倍数でない) の場合

$$\begin{bmatrix} \Psi_{uk} \\ \Psi_{vk} \\ \Psi_{wk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \\ \Psi_k \cos\left(k\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + \gamma_k\right) \\ \Psi_k \cos\left(k\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) + \gamma_k\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \\ \Psi_k \cos\left(k\omega t - 4\pi n \mp \frac{2}{3}\pi + \gamma_k\right) \\ \Psi_k \cos\left(k\omega t + 4\pi n \pm \frac{2}{3}\pi + \gamma_k\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \\ \Psi_k \cos\left(k\omega t \mp \frac{2}{3}\pi + \gamma_k\right) \\ \Psi_k \cos\left(k\omega t \pm \frac{2}{3}\pi + \gamma_k\right) \end{bmatrix}$$

となるから、各成分の和は

$$\begin{aligned} \Psi_{uk} + \Psi_{vk} + \Psi_{wk} &= \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) + \underbrace{\Psi_k \cos\left(k\omega t \mp \frac{2}{3}\pi + \gamma_k\right)}_{\text{red}} + \underbrace{\Psi_k \cos\left(k\omega t \pm \frac{2}{3}\pi + \gamma_k\right)}_{\text{blue}} \\ &= \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) + \underbrace{\Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \cos\left(\mp \frac{2}{3}\pi\right)}_{\text{red}} - \underbrace{\Psi_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \sin\left(\mp \frac{2}{3}\pi\right)}_{\text{red}} \\ &\quad + \underbrace{\Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) \cos\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right)}_{\text{blue}} - \underbrace{\Psi_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right)}_{\text{green}} \quad \leftarrow \text{加法定理} \\ &= \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) - \frac{1}{2} \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) - \Psi_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \sin\left(\mp \frac{2}{3}\pi\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \Psi_k \cos(k\omega t + \gamma_k) + \Psi_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \sin\left(\mp \frac{2}{3}\pi\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

と計算できる。

電機子鎖交磁束の高調波のd,q軸成分 (3/4)

したがって、d-q回転座標系に変換すると下記のとおり。

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Psi_{dk} \\ \Psi_{qk} \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{uk} \\ \Psi_{vk} \\ \Psi_{wk} \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{uk} - \frac{1}{2}\Psi_{vk} - \frac{1}{2}\Psi_{wk} \\ 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_{vk} - \frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_{wk} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \Psi_{uk} + \Psi_{vk} + \Psi_{wk} = 0 \\ \downarrow \end{matrix} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\Psi_{uk} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Psi_k \left(\cos\left(k\omega t \mp \frac{2}{3}\pi + \gamma_k\right) - \cos\left(k\omega t \pm \frac{2}{3}\pi + \gamma_k\right) \right) \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_k \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k\omega t + \gamma_k) \\ \pm \sin(k\omega t + \gamma_k) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ \text{和積の公式} \end{matrix} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_k \begin{bmatrix} \cos(\omega t)\cos(k\omega t + \gamma_k) \pm \sin(\omega t)\sin(k\omega t + \gamma_k) \\ -\sin(\omega t)\cos(k\omega t + \gamma_k) \pm \cos(\omega t)\sin(k\omega t + \gamma_k) \end{bmatrix} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2}}\Psi_k \begin{bmatrix} \cos((k \mp 1)\omega t + \gamma_k) \\ -\sin((1 \mp k)\omega t \mp \gamma_k) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ \text{加法定理} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

電機子鎖交磁束の高調波のd,q軸成分 (4/4)

✓ これまでの結果をまとめると次式のようにになる

$$\begin{aligned}
 \Psi_o = \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} &= \sum_{\substack{k=2n-1 \\ n \in \mathbb{N}}} \begin{bmatrix} \Psi_{dk} \\ \Psi_{qk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{d1} \\ \Psi_{q1} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{k=6n \pm 1 \\ n \in \mathbb{N}}} \Psi_k \begin{bmatrix} \cos((k \mp 1)\omega t + \gamma_k) \\ -\sin((1 \mp k)\omega t \mp \gamma_k) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Psi_{d1} \\ \Psi_{q1} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\begin{array}{l} \Psi_5 \begin{bmatrix} \cos(6\omega t + \gamma_5) \\ -\sin(6\omega t + \gamma_5) \end{bmatrix} + \Psi_7 \begin{bmatrix} \cos(6\omega t + \gamma_7) \\ -\sin(-6\omega t - \gamma_7) \end{bmatrix} \\ + \Psi_{11} \begin{bmatrix} \cos(12\omega t + \gamma_{11}) \\ -\sin(12\omega t + \gamma_{11}) \end{bmatrix} + \Psi_{13} \begin{bmatrix} \cos(12\omega t + \gamma_{13}) \\ -\sin(-12\omega t - \gamma_{13}) \end{bmatrix} + \dots \end{array} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} \Psi_{d1} \\ \Psi_{q1} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{k=6n \\ n \in \mathbb{N}}} \begin{bmatrix} \Psi_{k-1} \cos(k\omega t + \gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \cos(k\omega t + \gamma_{k+1}) \\ -\Psi_{k-1} \sin(k\omega t + \gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \sin(k\omega t + \gamma_{k+1}) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Psi_{d1} \\ \Psi_{q1} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{k=6n \\ n \in \mathbb{N}}} \begin{bmatrix} \Psi_{k-1} (\cos(k\omega t) \cos(\gamma_{k-1}) - \sin(k\omega t) \sin(\gamma_{k-1})) \\ + \Psi_{k+1} (\cos(k\omega t) \cos(\gamma_{k+1}) - \sin(k\omega t) \sin(\gamma_{k+1})) \\ -\Psi_{k-1} (\sin(k\omega t) \cos(\gamma_{k-1}) + \cos(k\omega t) \sin(\gamma_{k-1})) \\ + \Psi_{k+1} (\sin(k\omega t) \cos(\gamma_{k+1}) + \cos(k\omega t) \sin(\gamma_{k+1})) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Psi_{d1} \\ \Psi_{q1} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{k=6n \\ n \in \mathbb{N}}} \begin{bmatrix} (\Psi_{k-1} \cos(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \cos(\gamma_{k+1})) \cos(k\omega t) \\ - (\Psi_{k-1} \sin(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \sin(\gamma_{k+1})) \sin(k\omega t) \\ (-\Psi_{k-1} \sin(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \sin(\gamma_{k+1})) \cos(k\omega t) \\ + (-\Psi_{k-1} \cos(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \cos(\gamma_{k+1})) \sin(k\omega t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

トルクの計算(1/2)

- ✓ トルクは2次元の外積からスカラーとして計算し、軸まわり以外のトルクは無視
- ✓ トルクの外積計算のざっくり説明は下記サイトを参照

<https://yuyumoyuyu.com/2020/07/26/torquederivationbyvectorproduct/>

$$\begin{aligned}
 T &= -P_n(\mathbf{i}_a \times \boldsymbol{\Psi}_o) = \boldsymbol{\Psi}_o \times \mathbf{i}_a \\
 &= \left(\begin{bmatrix} \Psi_{d1} \\ \Psi_{q1} \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{k=6n \\ n \in \mathbb{N}}} \begin{bmatrix} (\Psi_{k-1} \cos(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \cos(\gamma_{k+1})) \cos(k\omega t) \\ -(\Psi_{k-1} \sin(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \sin(\gamma_{k+1})) \sin(k\omega t) \\ (-\Psi_{k-1} \sin(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \sin(\gamma_{k+1})) \cos(k\omega t) \\ +(-\Psi_{k-1} \cos(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \cos(\gamma_{k+1})) \sin(k\omega t) \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \\
 &= T_0 + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{k=6n \\ n \in \mathbb{N}}} \left(\begin{bmatrix} (\Psi_{k-1} \cos(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \cos(\gamma_{k+1})) \cos(k\omega t) \\ -(\Psi_{k-1} \sin(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \sin(\gamma_{k+1})) \sin(k\omega t) \end{bmatrix} i_q \right. \\
 &\quad \left. - \begin{bmatrix} (-\Psi_{k-1} \sin(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \sin(\gamma_{k+1})) \cos(k\omega t) \\ +(-\Psi_{k-1} \cos(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \cos(\gamma_{k+1})) \sin(k\omega t) \end{bmatrix} i_d \right)
 \end{aligned}$$

T : トルク

T_0 : トルクの直流成分

P_n : 極対数(1とする)

\mathbf{i}_a : d,q軸上の電機子電流ベクトル

i_d, i_q : d,q軸電流

トルクの計算(2/2)

(続き)

$$\begin{aligned} &= T_0 + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{k=6n \\ n \in \mathbb{N}}} (A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)) \\ &= T_0 + \sqrt{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{k=6n \\ n \in \mathbb{N}}} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \sin(k\omega t + \delta_k) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_k &= (\Psi_{k-1} \cos(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \cos(\gamma_{k+1})) i_q - (-\Psi_{k-1} \sin(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \sin(\gamma_{k+1})) i_d \\ B_k &= -(\Psi_{k-1} \sin(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \sin(\gamma_{k+1})) i_q - (-\Psi_{k-1} \cos(\gamma_{k-1}) + \Psi_{k+1} \cos(\gamma_{k+1})) i_d \\ \delta_k &= \tan^{-1} \left(\frac{A_k}{B_k} \right) \end{aligned}$$

- ✓ 以上より、電機子鎖交磁束の奇数次高調波がトルクの6の倍数次高調波として現れることがわかった

補足事項

- ✓ 前スライドまでの計算は電機子鎖交磁束の奇数次高調波のみを考慮
- ✓ 実際のトルク波形にはp.3の他の高調波も含まれるため注意が必要
- ✓ 特に、ハイブリッド車や電気自動車の主機モータで近年よく採用される8極48スロットモータではスロット高調波として $48/8=12$ の倍数次にリップルが出現し6次よりも12次高調波のほうが大きくなる傾向にある

参考文献

[1] 山崎克己：「埋込磁石同期電動機のトルクリプル極小化に関する検討—Part I：ギャップ磁束密度の時間・空間高調波による発生メカニズム解明—」，令和2年電気学会全国大会，5-018，pp.27-28 (2020)

※論文がでたら追記します

[2] 武田洋次・松井信行・森本茂雄・本田幸夫：「埋込磁石同期モータの設計と制御」，オーム社 (2001)