マクスウェル応力テンソルから PMSMのトルクを求める

大阪府立大学 工学研究科
清水　悠生

モータのトルクを求める方法は様々

- ✓ モータのトルクを求める方法はいくつか存在

- ✓ 本スライドでは，パーミアンス法や有限要素法から求めたギャップ磁束からマクスウェル応力テンソルを用いてトルクを算出する方法について説明

- ✓ 電機子電流と電機子鎖交磁束から
  トルクやトルクリプルを求める方法はこちらを参照
  https://yuyumoyuyu.com/2020/07/26/torquederivationbyvectorproduct/
  https://yuyumoyuyu.com/2020/08/02/orderoftorqueripple/

マクスウェル応力テンソルとは

✓ 誘電性と磁性を合わせ持つ物体が
時間変化する電磁場内におかれたとき
この物体に働く（広義の）ローレンツ力Fは

$$\boldsymbol{F} = \int_V (\underbrace{\rho \boldsymbol{E}}_{\text{クーロン力}} + \underbrace{\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B}}_{\text{（狭義の）ローレンツ力}}) dv$$

$$= \int_S \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} ds$$

V：物体の内部領域(dvは微小領域)
$\rho = \rho(\boldsymbol{r}, t)$：電荷密度
$\boldsymbol{E} = E(\boldsymbol{r}, t)$：電場
$\boldsymbol{i} = i(\boldsymbol{r}, t)$：電流密度
$\boldsymbol{B} = B(\boldsymbol{r}, t)$：磁束密度
S：物体の表面(dsは微小領域)
$\boldsymbol{n}$：各表面の法線方向

と表され，この行列$\boldsymbol{T}$をマクスウェル応力テンソルと呼ぶ。
行列$\boldsymbol{T}$の成分表示T_{ij}(i,j=x,y,z)は

$$T_{ij} = \underbrace{\varepsilon_0 E_i E_j - \frac{\varepsilon_0 (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E})}{2} \delta_{ij}}_{} + \underbrace{\frac{B_i B_j}{\mu_0} - \frac{(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B})}{2\mu_0} \delta_{ij}}_{}$$

となる。

ε_0：真空の誘電率
μ_0：真空の透磁率
δ_{ij}：クロネッカーのデルタ
（i=jなら1,
i≠jなら0になる変数)

（参考）ときわ台学: http://www.f-denshi.com/000TokiwaJPN/32denjk/apdx03.html

ちゃんと書くとこんなに複雑

✓ マクスウェル応力テンソルをちゃんと書くと…

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 E_x E_x - \dfrac{\varepsilon_0(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})}{2} + \dfrac{B_x B_x}{\mu_0} - \dfrac{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})}{2\mu_0} & \varepsilon_0 E_x E_y + \dfrac{1}{\mu_0} B_x B_y & \varepsilon_0 E_x E_z + \dfrac{1}{\mu_0} B_x B_z \\ \varepsilon_0 E_y E_x + \dfrac{1}{\mu_0} B_y B_x & \varepsilon_0 E_y E_y - \dfrac{\varepsilon_0(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})}{2} + \dfrac{B_y B_y}{\mu_0} - \dfrac{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})}{2\mu_0} & \varepsilon_0 E_y E_z + \dfrac{1}{\mu_0} B_y B_z \\ \varepsilon_0 E_z E_x + \dfrac{1}{\mu_0} B_z B_x & \varepsilon_0 E_z E_y + \dfrac{1}{\mu_0} B_z B_y & \varepsilon_0 E_z E_z - \dfrac{\varepsilon_0(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})}{2} + \dfrac{B_z B_z}{\mu_0} - \dfrac{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})}{2\mu_0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \dfrac{E_x^2 - E_y^2 - E_z^2}{2} + \dfrac{B_x^2 - B_y^2 - B_z^2}{2\mu_0} & \varepsilon_0 E_x E_y + \dfrac{1}{\mu_0} B_x B_y & \varepsilon_0 E_x E_z + \dfrac{1}{\mu_0} B_x B_z \\ \varepsilon_0 E_y E_x + \dfrac{1}{\mu_0} B_y B_x & \varepsilon_0 \dfrac{E_y^2 - E_z^2 - E_x^2}{2} + \dfrac{B_y^2 - B_z^2 - B_x^2}{2\mu_0} & \varepsilon_0 E_y E_z + \dfrac{1}{\mu_0} B_y B_z \\ \varepsilon_0 E_z E_x + \dfrac{1}{\mu_0} B_z B_x & \varepsilon_0 E_z E_y + \dfrac{1}{\mu_0} B_z B_y & \varepsilon_0 \dfrac{E_z^2 - E_x^2 - E_y^2}{2} + \dfrac{B_z^2 - B_x^2 - B_y^2}{2\mu_0} \end{bmatrix}$$

ただし,

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

モータの世界で使いやすいように変形

✓ この複雑な式を下記の3つの観点から
モータに適用しやすいように変形する

① クーロン力による成分は0とする

② 円筒座標系に変換

③ r方向のみを抽出

①クーロン力による成分は0とする

- ✓ モータでは，ステータとロータ間のギャップ部（空気層）で発生する力を考える

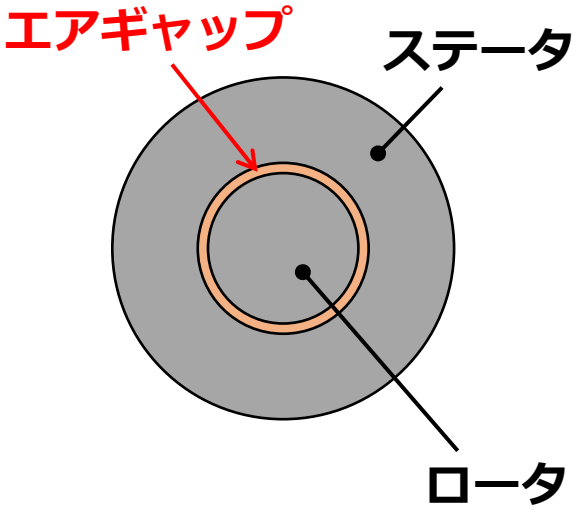
- ✓ ステータとロータ内部の電位は一様で
両者の電位差を0Vと仮定すると
ギャップ内のどの2点A,Bを選んでも

$$V_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$$

V_{AB}：点A,B間の電位差

より，ギャップ部の電場の影響は
無視できる



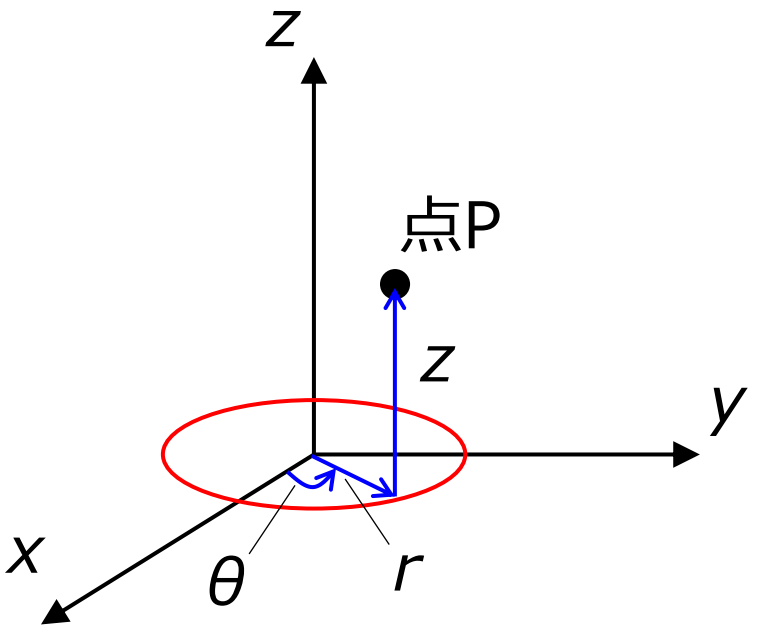
②円筒座標系に変換

- ✓ モータではその形状上，直交座標系より円筒座標系の方が計算がスムーズになる

- ✓ 応力テンソルの導出は座標系に依存せず
  そのまま磁場の成分を

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_z \end{bmatrix}$$

と置き換えればよい



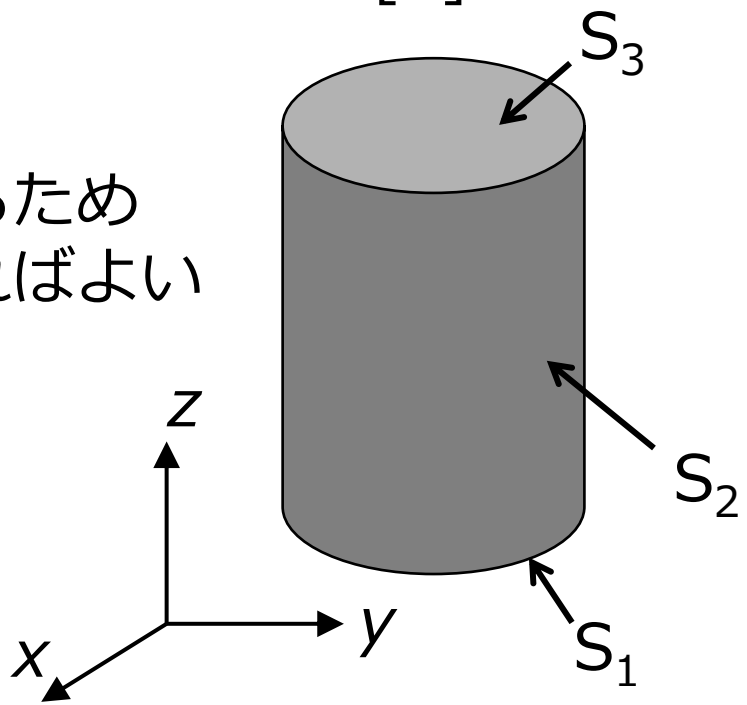
③r方向のみを抽出

- ✓ ロータを円筒形状と仮定し，その底面をS_1,S_3,
  側面をS_2とする

- ✓ ロータ表面の磁束密度がz方向で一様である場合
  S_1とS_3で発生するローレンツ力は互いに打ち消しあうため
  S_2で発生するローレンツ力のみを考えればよい[1]

- ✓ S_2における法線ベクトル$\boldsymbol{n}$は
  円筒座標系の場合*r*成分のみとなるため
  応力テンソルの*r*列のみを計算すればよい

$$\boldsymbol{F} = \int_{S_2} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} ds = \int_{S_2} \boldsymbol{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds$$



[1] K. J. Meessen *et al.*, “Force Calculations in 3-D Cylindrical Structures Using Fourier Analysis and the Maxwell Stress Tensor,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 1, pp. 536-545, Jan. 2013.

やっとモータの世界まで来ました

- ✓ 前スライドまでの条件から
  ロータ表面で発生するローレンツ力の各成分は
  下記の通り計算できる

$$\boldsymbol{F} = \int_{S_2} \boldsymbol{T} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_r = \displaystyle\int_{S_2} \frac{B_r^2 - B_\theta^2 - B_z^2}{2\mu_0} ds \\ F_\theta = \displaystyle\int_{S_2} \frac{B_\theta B_r}{\mu_0} ds \\ F_z = \displaystyle\int_{S_2} \frac{B_z B_r}{\mu_0} ds \end{cases}$$

- ✓ θ方向成分のローレンツ力がトルクの計算に用いられ，
  r,z方向成分は振動や騒音の評価，軸の強度の計算（曲げモーメントetc）や軸受けの仕様決定などに使用される

トルクを計算してみる

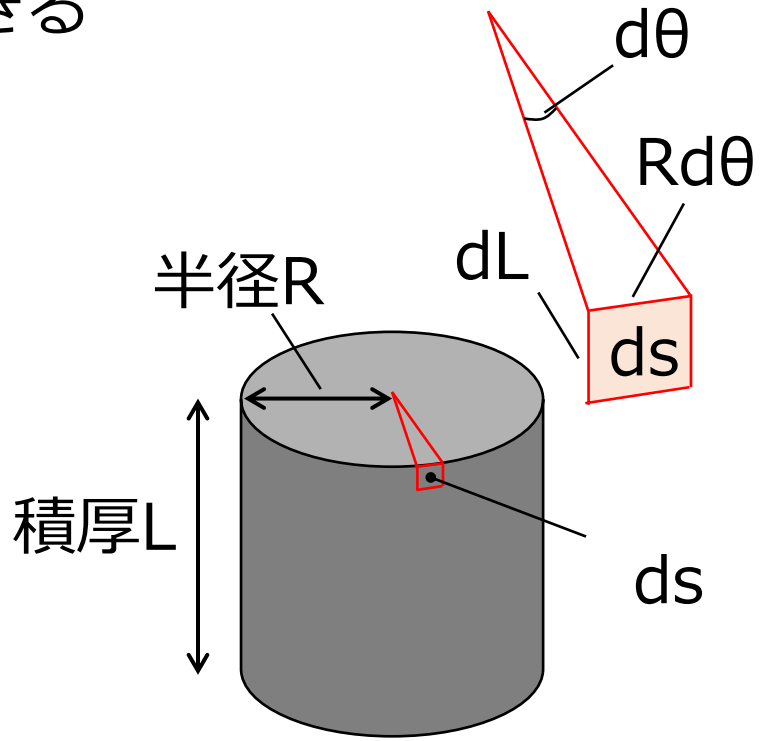
✓ θ方向成分のローレンツ力から
トルクは下記のように計算できる

$$T = RF_\theta$$

$$= R\int_{S_2} \frac{B_\theta B_r}{\mu_0} ds$$

$$= R\int_0^L dL \int_0^{2\pi} Rd\theta \frac{B_\theta B_r}{\mu_0}$$

$$= \frac{LR^2}{\mu_0}\int_0^{2\pi} B_\theta B_r d\theta$$



✓ ロータ表面の磁束密度の各成分は
有限要素法を用いた静磁場解析などから入手する